



UNIVERSIDAD DE BELGRANO

Las tesis de Belgrano

Facultad de Ingeniería y Tecnología Informática
Carrera Ingeniería Civil

Un modelo mixto de elementos finitos
para placas compuestas multicapas

N° 845

Braian Alexis Desía

Tutor: Ing. Roberto S. Carnicer

Co-Tutor: Ing. Rodolfo A. Schwarz

Departamento de Investigaciones

Fecha defensa de tesina: 7 agosto de 2015

Universidad de Belgrano
Zabala 1837 (C1426DQ6)
Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Argentina
Tel.: 011-4788-5400 int. 2533
e-mail: invest@ub.edu.ar
url: <http://www.ub.edu.ar/investigaciones>

UN MODELO MIXTO DE ELEMENTOS FINITOS PARA PLACAS COMPUESTAS MULTICAPAS

Braian A. Desía¹

Resumen

Se presenta un modelo mixto de elementos finitos para la resolución numérica de placas multicapas. El objeto principal es analizar cada capa como una placa aislada, donde la continuidad de desplazamientos se logra mediante multiplicadores de Lagrange. Este procedimiento nos permite trabajar con cualquier modelo para placa simple (de manera de asegurar el adecuado comportamiento de cada capa), y la complejidad del sistema multicapas se evita asegurando la condición de desplazamientos mediante los multiplicadores de Lagrange (que representan variables estáticas). Un principio variacional mixto es desarrollado para derivar las ecuaciones que gobiernan el problema. La forma débil de las ecuaciones de equilibrio es discretizada mediante elementos finitos cuadriláteros bi-lineales, tanto para el campo de desplazamientos como para el de los multiplicadores de Lagrange. El bloqueo por corte es evitado en base a la técnica de interpolación mixta de las componentes tensoriales (MITC). Una estrategia para resolver el problema de autovalores es tratada. Se ha implementado este modelo mixto, llevándose a cabo diversos ejemplos para análisis lineal estático y vibraciones que han sido contrastados exitosamente con otros resultados de la literatura.

Palabras Clave: Elementos finitos mixtos, Placas multicapas, Multiplicadores de Lagrange, Tensiones interlaminares.

Abstract

A mixed finite element model to numerical solving of multilayered plates is presented. The main aim is to analyze each layer as an isolated plate, where the displacement continuity is achieved by means Lagrange multipliers. This procedure allows us to work with any model for single plate (to ensure the proper behavior of each layer), and the complexity of the multilayer system is avoided assuring the displacement condition by Lagrange multipliers (which represent static variables). A mixed variational principle is developed to derive the governing equations of the problem. The weak form of the equilibrium equations is discretized by bi-linear quadrilateral finite elements, both to the field of displacement and to the Lagrange multipliers. The shear-locking is avoided based on the technique of Mixed Interpolation of Tensorial Components (MITC). A strategy to solve the eigenproblem is treated. This mixed model has been implemented, carrying out several examples for linear static analysis and vibrations which have been successfully compared with other results of the literature.

Keywords: *Mixed finite elements, Multilayered Plates, Lagrange multipliers, Interlaminar stresses.*

¹ E-mail: b.desia@hotmail.com

Publicaciones

Parte de este trabajo ha sido publicado y/o se encuentra en proceso de publicación.

Publicaciones realizadas

- Carnicer R. S., Desía B. A., Schwarz R. A. & Pan Q. (2012). Modelización de placas multicapas mediante elementos finitos con variables mixtas (cinemáticas y estáticas). *XXII Jornadas Argentinas de Ingeniería Estructural*. Buenos Aires.
- Carnicer R. S., Desía B. A., Schwarz R. A. & Pan Q. (2012). Análisis de placas multicapas mediante un modelo de elementos finitos híbrido. *Mecánica Computacional, XXXI*, 857-874.
- Carnicer R. S., Desía B. A. & Schwarz R. A. (2013). Determinación de frecuencias propias de placas multicapas mediante elementos finitos mixtos. *Mecánica Computacional, XXXII*, 1979-1989.
- Carnicer R. S., Desía B. A. & Schwarz R. A. (2014). Pandeo de placas multicapas mediante elementos finitos mixtos. *XXIII Jornadas Argentinas de Ingeniería Estructural*. Buenos Aires.
- Carnicer R. S., Desía B. A. & Schwarz R. A. (2014). Determination of natural frequencies of multilayered plates by mixed finite elements. *Journal of Mechanics Engineering and Automation, 4(10)*, 820-827.

Agradecimientos

Quiero agradecer a los Ingenieros Roberto S. Carnicer y Rodolfo A. Schwarz, directores de esta tesis, por el tiempo y apoyo necesario para la realización del presente trabajo.

A mi familia y amigos quienes confían en mí, acompañándome durante todo este tiempo.

ÍNDICE

Resumen.....	iii
<i>Abstract</i>	iii
Publicaciones.....	v
Agradecimientos.....	vii
ÍNDICE.....	ix
Notación.....	xi
Figuras.....	xii
Tablas.....	xiv
1 INTRODUCCIÓN.....	16
2 REVISIÓN DE LA TEORÍA DE PLACAS.....	20
3 TEORÍA DE PLACAS MULTICAPAS.....	25
3.1 Formulación Variacional.....	25
3.2 Cinemática.....	28
3.3 Ecuaciones de Equilibrio.....	31
3.4 Ecuaciones Constitutivas.....	35
3.5 Ecuaciones de Equilibrio en forma irreducible.....	36
4 DISCRETIZACIÓN POR ELEMENTOS FINITOS.....	37
4.1 Forma Débil.....	37
4.2 Modelo de Elementos Finitos.....	38
4.3 Análisis lineal estático.....	42
4.4 Análisis de vibraciones libres.....	43
4.5 Resolución del problema de autovalores.....	43
5 RESULTADOS NUMÉRICOS.....	46
5.1 Análisis de convergencia. Efectos de la relación espesor/lado.....	47
5.2 Verificación numérica de los multiplicadores de Lagrange.....	51
5.3 Placa Multicapas. Efecto <i>Zig-Zag</i>	56
5.4 Vibraciones libres. Efectos de la anisotropía en la frecuencia natural.....	58
5.5 Placa <i>Sandwich</i>	60
6 CONCLUSIONES.....	63
REFERENCIAS.....	65
APÉNDICE A: Relación Constitutiva para láminas reforzadas con fibras.....	69

APÉNDICE B: Bloque por corte (<i>Shear-locking</i>).....	72
APÉNDICE C: Derivación de la interpolación del corte transversal	75
APÉNDICE D: Matrices del modelo de elementos finitos	79

Notación

Toda la notación empleada es oportunamente definida en el texto.

A lo largo del presente trabajo se aplica, salvo indicación, el *convenio de sumación*, también denominado *notación de Einstein* o *notación indicial*. Índices Griegos en minúscula y Latinos en mayúscula toman los valores 1,2,3 y 1,2, respectivamente. En un sistema de coordenadas cartesianas,

$$\begin{aligned} a_\alpha b_\alpha &= \sum_{\alpha=1}^3 a_\alpha b_\alpha & a_M b_M &= \sum_{M=1}^2 a_M b_M \\ a_{\alpha\gamma} b_\gamma &= \sum_{\gamma=1}^3 a_{\alpha\gamma} b_\gamma & a_{MN} b_N &= \sum_{N=1}^2 a_{MN} b_N \end{aligned}$$

Así mismo, vale destacar que el convenio de sumación no aplica para índices Latinos en minúscula.

Figuras

Figura 1.1: Comportamiento mecánico de materiales isotrópicos y anisótropos. (Trazo discontinuo: configuración inicial. Trazo continuo: configuración deformada).

Figura 1.2: Efectos del acoplamiento. a) Flexión-extensión, b) torsión-extensión, y c) corte-extensión. (Trazo discontinuo: configuración inicial. Trazo continuo: configuración deformada).

Figura 2.1: Campo de desplazamientos HSDT mejorado con la función *Zig-Zag* de Murakami.

Figura 3.1: Placa en equilibrio estático.

Figura 3.2: Normal saliente a la superficie superior e inferior de una capa genérica.

Figura 3.3: Equilibrio de las tensiones interlaminares.

Figura 3.4: Placa compuesta de tres capas.

Figura 3.5: Configuración inicial y deformada del modelo de Mindlin.

Figura 3.6: Campo de desplazamientos en el espesor del modelo multicapas.

Figura 3.7: Fuerzas resultantes en el plano de la placa.

Figura 3.8: Momentos resultantes en la placa.

Figura 3.9: Fuerzas resultantes de corte transversal al plano de la placa.

Figura 4.1: Elemento cuadrilátero bi-lineal.

Figura 5.1: Malla uniforme de 6x6 elementos en un cuarto de placa.

Figura 5.2: Convergencia del modelo para varias relaciones espesor/lado. Eje de ordenadas: $\bar{w}_{ACTUAL}/\bar{w}_{EXACTA}$.

Figura 5.3: Variación de la deflexión máxima según la relación espesor/lado. Laminado cuadrado (0°/90°/90°/0°) simplemente apoyado bajo carga sinusoidal. Eje de ordenadas: $\log_{10}(\bar{w})$.

Figura 5.4: Mallas distorsionadas de 4x4 en un cuarto de placa.

Figura 5.5: Variación a lo largo del espesor de la tensión de corte transversal $\bar{\sigma}_{13}(0, b/2, \bar{z}^3)$ para $h/a=0.25$. Laminado cuadrado (0°/90°/0°) simplemente apoyado bajo carga sinusoidal.

Figura 5.6: Variación a lo largo del espesor de la tensión de corte transversal $\bar{\sigma}_{23}(a/2, 0, \bar{z}^3)$ para $h/a=0.25$. Laminado cuadrado (0°/90°/0°) simplemente apoyado bajo carga sinusoidal.

Figura 5.7: Distribución a lo largo del espesor de la tensión normal transversal $\bar{\sigma}_{33}(a/2, b/2, \bar{z}^3)$ para $h/a=0.02$. Laminado cuadrado (0°/90°/0°) simplemente apoyado bajo carga sinusoidal.

Figura 5.8: Tensión de corte transversal $\bar{\sigma}_{13}(0, b/2, \bar{z}^3)$ y tensión normal transversal $\bar{\sigma}_{33}(a/2, b/2, \bar{z}^3)$ modales para una placa laminada (0°/90°) simplemente apoyada. ($E_L/E_T=30$ – 30 capas de cálculo).

Figura 5.9: Tensión de corte transversal $\bar{\sigma}_{13}(0, b/2, \bar{z}^3)$ y tensión normal transversal $\bar{\sigma}_{33}(a/2, b/2, \bar{z}^3)$ modales para una placa laminada (0°/90°)₂ simplemente apoyada. ($E_L/E_T=30$ – 20 capas de cálculo).

Figura 5.10: Tensión de corte transversal $\bar{\sigma}_{13}(0, b/2, \bar{z}^3)$ y tensión normal transversal $\bar{\sigma}_{33}(a/2, b/2, \bar{z}^3)$ modales para una placa laminada (0°/90°)₅ simplemente apoyada. ($E_L/E_T=30$ – 20 capas de cálculo).

Figura 5.11: Historia de convergencia en la solución de los autovalores.

Figura 5.12: Desplazamientos transversales $\bar{w}(\bar{z}^1, \bar{z}^2)$ para $h/a=0.25$. Placa cuadrada laminada (0°/90°/0°/90°/0°/90°/0°/90°/0°) simplemente apoyada bajo carga sinusoidal.

Figura 5.13: Tensión normal en el plano $\bar{\sigma}_{11}(a/2, b/2, \bar{z}^3)$. Placa cuadrada simplemente apoyada con esquema de laminación $(0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ)$ bajo carga sinusoidal. Relación $h/a=0.25$.

Figura 5.14: Tensión normal en el plano $\bar{\sigma}_{22}(a/2, b/2, \bar{z}^3)$. Placa cuadrada simplemente apoyada con esquema de laminación $(0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ)$ bajo carga sinusoidal. Relación $h/a=0.25$.

Figura 5.15: Tensión de corte en el plano $\bar{\sigma}_{12}(0, 0, \bar{z}^3)$. Placa cuadrada simplemente apoyada con esquema de laminación $(0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ)$ bajo carga sinusoidal. Relación $h/a=0.25$.

Figura 5.16: Desplazamiento en el plano $\bar{u}_1(0, b/2, \bar{z}^3)$ para varias relaciones espesor/lado. Placa laminada $(0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ)$ cuadrada simplemente apoyada bajo carga sinusoidal.

Figura 5.17: Efecto del número de capas de cálculo y del grado de ortotropía de las láminas en la solución de la frecuencia natural. Laminado $(0^\circ/90^\circ)$. Eje de ordenadas: $\bar{\omega}_{ACTUAL}/\bar{\omega}_{EXACTA}$.

Figura 5.18: Efecto del número de capas de cálculo y del grado de ortotropía de las láminas en la solución de la frecuencia natural. Laminado $(0^\circ/90^\circ)_2$. Eje de ordenadas: $\bar{\omega}_{ACTUAL}/\bar{\omega}_{EXACTA}$.

Figura 5.19: Efecto del número de capas de cálculo y del grado de ortotropía de las láminas en la solución de la frecuencia natural. Laminado $(0^\circ/90^\circ)_3$. Eje de ordenadas: $\bar{\omega}_{ACTUAL}/\bar{\omega}_{EXACTA}$.

Figura 5.20: Efecto del grado de ortotropía individual de las láminas y del grado de anisotropía global en la frecuencia natural. Solución de la Elasticidad (Noor, 1973). Eje de ordenadas: $\bar{\omega}$.

Figura 5.21: Resistencia y rigidez de construcciones tipo *sandwich* con núcleo *honeycomb* en comparación con elementos laminados (F. A. A., 2012).

Figura 5.22: Desplazamiento en el plano $\bar{u}_1(0, b/2, \bar{z}^3)$ para varias relaciones espesor/lado. Placa *sandwich* $(0^\circ/C/0^\circ)$ cuadrada simplemente apoyada bajo carga sinusoidal.

Figura 5.23: Tensión normal en el plano $\bar{\sigma}_{11}(a/2, b/2, \bar{z}^3)$ (Izquierda) y tensión transversal de corte $\bar{\sigma}_{13}(0, b/2, \bar{z}^3)$. Placa *sandwich* $(0^\circ/C/0^\circ)$ simplemente apoyada bajo carga sinusoidal. Relación $h/a=0.25$.

Figura A.1: Sistema de coordenadas material y del problema.

Figura B.1: Elemento isoparamétrico de viga.

Figura C.1: Elemento de cáscara de 4 nodos.

Figura C.2: Interpolación de la deformación transversal por corte.

Figura D.1: Matriz de rigidez. Modelo con tres capas numéricas.

Tablas

Tabla 5.1: Deflexión central de una placa rectangular ($b=3a$) simplemente apoyada con un esquema ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) bajo una carga sinusoidal.

Tabla 5.2: Esquemas de integración numérica mediante cuadratura de Gauss.

Tabla 5.3: Performances de los elementos MITC4 y QUAD4 para distintas relaciones espesor/lado.

Tabla 5.4: Efecto de la distorsión de la malla en la solución.

Tabla 5.5: Comparación de las tensiones transversales de corte $\bar{\sigma}_{13}$. Laminado cuadrado ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) simplemente apoyado bajo carga sinusoidal.

Tabla 5.6: Comparación de las tensiones transversales de corte $\bar{\sigma}_{23}$. Laminado cuadrado ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) simplemente apoyado bajo carga sinusoidal.

Tabla 5.7: Deflexión central y tensiones para una placa cuadrada simplemente apoyada con una secuencia $0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ$ bajo una carga sinusoidal.

Tabla 5.8: Efecto del número de capas y del grado de ortotropía de las láminas individuales en la frecuencia fundamental para una placa cuadrada simplemente apoyada con $h/a=0.20$.

Tabla 5.9: Tensiones para una placa *sandwich* cuadrada simplemente apoyada con un esquema $0^\circ/C/0^\circ$ bajo una carga sinusoidal.

1 INTRODUCCIÓN

Los materiales compuestos son dos o más materiales combinados que a escala macroscópica constituyen un tercer material con propiedades mejoradas para un determinado problema. En particular, los materiales compuestos avanzados (también denominados “*Composites*”) son aquellos formados por fibras de alta *performance* embebidas en una matriz, la cual puede ser metálica como aluminio, polimérica como resina epoxi (polímero termoestable), o cerámica. Las fibras confieren altas propiedades físicas al material en la dirección de las mismas, mientras que la matriz las mantiene ligadas y les brinda protección ambiental. Ejemplos típicos de compuestos avanzados son grafito/epoxi, Kevlar[®]/epoxi y boro/aluminio.

Si bien los *composites* tienen su origen en la industria aeroespacial, en la actualidad, con el desarrollo de las técnicas de manufactura y la reducción de costos de la materia prima, son ampliamente utilizados en diversas ramas de la ingeniería, tales como la industria civil, naval, aeronáutica y mecánica, para la construcción de estructuras como cascos de embarcaciones deportivas, tanques a presión y hélices de aerogeneradores, entre otras. Las ventajas que estimulan su aplicación residen en la alta relación resistencia/peso y rigidez/peso, resistencia a la corrosión, buen comportamiento a la fatiga, bajo coeficiente térmico en la dirección de la fibra y otras propiedades superiores respecto de los materiales convencionales como el acero o el aluminio. En la aviación, por ejemplo, la reducción de peso tiene una directa relación con los costos de operación: una disminución de 0.500 kilogramos de masa en aeronaves comerciales permite salvar 1500 litros de combustible por año (los gastos de combustibles representan un 25% del costo de operación de una aerolínea comercial) y aumentar la autonomía de vuelo (Kaw, 2006). En materia de estructuras civiles, la utilización de *composites* en tableros de puentes se ha ido incrementado debido principalmente a su bajo peso propio (aprox. un 20% de un tablero de hormigón equivalente) que permite un rápido montaje y resulta atractivo en puentes móviles (Vinson & Sierakowski, 2004). Otras aplicaciones en estructuras civiles que se pueden citar son la utilización de perfiles pultruidos (“*Pultruded Profiles*”) en reemplazo de perfiles metálicos y el empleo de fibra de carbono en la reparación y/o refuerzo de estructuras de hormigón (Pendhari et al., 2008). Un extenso desarrollo del empleo de los compuestos avanzados puede verse en Jones (1999), Kaw (2006).

Elementos estructurales de materiales compuestos, como vigas, placas y cáscaras multicapas, son formados por capas de diferentes materiales que se encuentran perfectamente ligadas entre sí, presentando una conducta anisótropa en la dirección del espesor. En los laminados compuestos, láminas reforzadas por fibras, comúnmente continuas y unidireccionales, son apiladas y orientadas de acuerdo a los requerimientos de diseño, a los efectos de optimizar el uso del material. Por ejemplo, si un laminado presenta una secuencia de apilamiento (“*stacking sequence*”) con fibras alineadas a 30° ó 45°, éstas resultan adecuadas para absorber esfuerzos de corte (Reddy, 2003). Por lo tanto, cuando nos referimos a estructuras compuestas, el diseño no debe sólo limitarse a la geometría de la estructura, sino también al material. Además de los laminados, otros compuestos multicapas son las estructuras inteligentes con materiales piezoeléctricos, los paneles *sandwichs*, y los materiales funcionalmente graduados (FGMs, *Functionally Graded Materials*).

Por su naturaleza heterogénea a escala microscópica, los materiales compuestos presentan una condición anisótropa que conduce a un complicado comportamiento mecánico que difiere al de los materiales isótropos tradicionales. A modo de ejemplo, mientras que un esfuerzo axial causa un estiramiento en la dirección del mismo y una contracción en la dirección perpendicular en los materiales isótropos, la misma sollicitación en los materiales anisótropos provoca

además una deformación por corte debido al acoplamiento corte-extensión (“*shear-stretching coupling*”), tal como se muestra en la [Figura 1.1](#) (Jones, 1999).

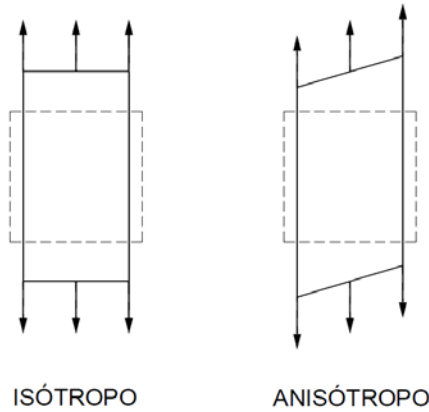


Figura 1.1: Comportamiento mecánico de materiales isotrópicos y anisótropos. (Trazo discontinuo: configuración inicial. Trazo continuo: configuración deformada).

Varios casos de acoplamiento en estructuras laminadas son ilustrados en la [Figura 1.2](#): a) flexión-extensión (“*bending-stretching coupling*”) en laminado compuesto no simétrico ($0^\circ/90^\circ$), b) acoplamiento torsión-extensión (“*torsion-stretching coupling*”) en dos láminas con fibras a $\pm\theta$, y c) acoplamiento corte-extensión con todas las láminas en ángulo θ , con $0^\circ < \theta < 90^\circ$ (Barbero, 1999).

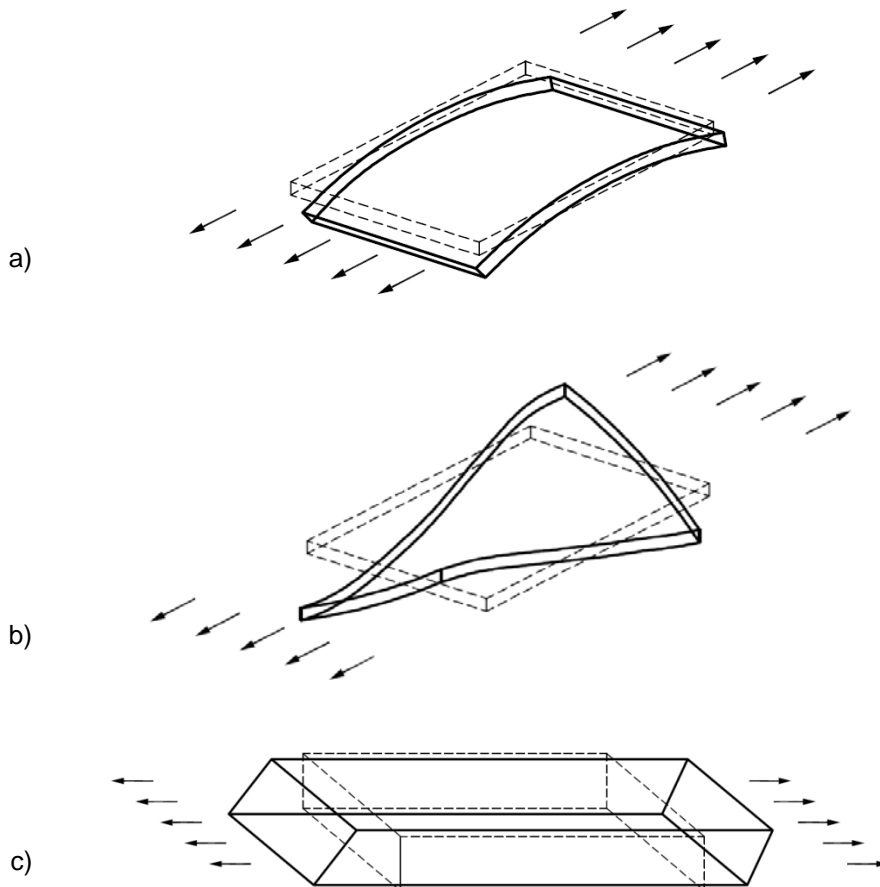


Figura 1.2: Efectos del acoplamiento. a) Flexión-extensión, b) torsión-extensión, y c) corte-extensión. (Trazo discontinuo: configuración inicial. Trazo continuo: configuración deformada).

Dentro de la mecánica del sólido, los problemas de placas, así como muchos otros, son modelados matemáticamente mediante Ecuaciones Diferenciales Parciales (PDE, *Partial Differential Equations*), donde variables físicas como desplazamientos, tensiones y deformaciones, son asumidas funciones continuas del espacio, y el sólido es analizado como un ensamble de elementos infinitesimales. El conjunto de PDE que describen el problema es comúnmente denominado como la forma fuerte del mismo y muy pocas veces puede ser resuelto exactamente. En algunos casos, se admite el uso de soluciones expresadas en forma de series. Como ejemplo, se cita la ecuación de Germain-Lagrange de placas delgadas ([Timoshenko & Woinowsky-Krieger, 1959](#)),

$$u_{3,1111} + u_{3,1122} + u_{3,2222} = \frac{q(z^1, z^2)}{D} \quad (1.1)$$

definida en la región $0 \leq z^1 \leq a$, $0 \leq z^2 \leq b$, donde u_3 es el desplazamiento transversal, a, b son las dimensiones de la placa en el plano, D la rigidez a flexión y q la carga distribuida por unidad de superficie que actúa perpendicular al plano de la placa. Se introduce la siguiente notación para las derivadas parciales respecto de la posición en el espacio,

$$\frac{\partial (\cdot)}{\partial (z^1)} = (\cdot)_{,1} \quad \frac{\partial (\cdot)}{\partial (z^2)} = (\cdot)_{,2} \quad \frac{\partial (\cdot)}{\partial (z^3)} = (\cdot)_{,3}$$

La solución puede resolverse, para una placa simplemente apoyada, expresando a u_3 como,

$$u_3 = \sum_m \sum_n u_{mn} \sin\left(\frac{m \pi z^1}{a}\right) \sin\left(\frac{n \pi z^2}{b}\right) \quad (1.2)$$

Sustituyendo (1.2) en (1.1), la solución debe ser completada expandiendo el lado derecho de la ecuación diferencial de la placa como una serie doble de senos. La precisión del resultado obtenido dependerá del número de términos de la sumatoria utilizados. Esta forma es comúnmente denominada solución de Navier ("*Navier closed-form solution*").

No obstante, por lo general no es posible tratar ciertas condiciones de contorno siguiendo este enfoque. Así, se tiene que la resolución analítica de este tipo de problemas sólo es posible en algunos casos particulares de geometría, condiciones de borde, cargas, secuencia de laminado (en el caso de placas compuestas). En aquellos en los cuales no puede obtenerse tal solución, como en la mayoría de los problemas reales de ingeniería, adquieren importancia los métodos numéricos o computacionales, en especial, el Método de los Elementos Finitos (*Finite Element Method*).

En síntesis, el análisis de elementos estructurales compuestos implica una serie de pasos que requieren conocimientos de elasticidad anisótropa, teoría placas laminadas y métodos analíticos o computacionales para resolver las ecuaciones que gobiernan el problema. La creciente utilización de los mismos demanda métodos confiables y precisos para determinar las características estáticas y dinámicas de los mismos. El objeto del presente estudio es el desarrollo de una teoría por capas con variables mixtas y su modelo de elementos finitos para el estudio de placas compuestas, generalizando una teoría de placas simples a partir de la inclusión de multiplicadores de Lagrange. Este trabajo representa una extensión del modelo mixto introducido por [Alliney & Carnicer \(1992\)](#).

La aplicación de modelos multicapas puede extenderse al análisis de losas de hormigón armado, enfoque denominado "*Layered RC elements*". La idea fundamental consiste en dividir al elemento estructural en capas de hormigón y refuerzo (barras de acero o fibras poliméricas). Mediante un proceso de carga incremental, se parte de la consideración de la sección de hormigón sin fisurar. Un criterio de falla es adoptado, a partir del cual se determinan el inicio y la propagación de las fisuras, que son representadas reduciendo a cero la rigidez perpendicular a la dirección de fisuración. De este modo, cuando se tiene fisuras en las dos direcciones principales del plano, se pierde la rigidez y resistencia del hormigón. Trabajos enfocados en

esta metodología de análisis fueron desarrollados por [Zhang & Zu \(2010\)](#), entre otros, obteniendo resultados numéricos semejantes a los valores experimentales. Este aprovechamiento resulta de especial interés en estructuras donde son requeridas placas y cáscaras de hormigón de gran espesor solicitadas a flexión y esfuerzos membranales, como en obras portuarias o la industria nuclear.

Esta tesina presenta en su [Capítulo 1](#) una introducción a la temática estudiada, describiéndose la motivación del trabajo, su alcance y la organización del mismo. En el [Capítulo 2](#) se lleva a cabo un breve resumen de la literatura acerca de la teoría de placas y su extensión al análisis de laminados compuestos. La formulación variacional del modelo matemático presentado es desarrollada en el [Capítulo 3](#), donde se plantea la cinemática adoptada y se obtiene la forma fuerte de las ecuaciones que gobiernan el problema. El [Capítulo 4](#) comienza con la derivación de la forma débil de las ecuaciones de equilibrio, siguiendo con la formulación por elementos finitos. Además, las expresiones referidas al problema lineal estático y de vibraciones libres son tratadas, así como también, la estrategia de resolución. La implementación numérica se lleva a cabo en el [Capítulo 5](#). Se realizan varios ejemplos, cuyos resultados son comparados con los disponibles en la literatura. Diversos tópicos son estudiados, tales como el efecto de la distorsión en la malla y la distribución en el espesor de las tensiones transversales, entre otros. Las conclusiones pertinentes al trabajo son redactadas en el [Capítulo 6](#). Finalmente, las referencias de este trabajo son enlistadas y una serie de apéndices, que detallan la información referida en los diferentes capítulos, son incluidos.

2 REVISIÓN DE LA TEORÍA DE PLACAS

Las placas son elementos estructurales tridimensionales que poseen dos dimensiones predominantes sobre la tercera, el espesor. El comportamiento de una placa (o cáscara plana) puede ser resuelto directamente a partir de las ecuaciones de la Elasticidad 3D. Sin embargo, este enfoque resulta bastante complejo y costoso desde los puntos de vista matemático y numérico, respectivamente, restringiéndose a casos simples. En el marco de las estructuras multicapas, [Pagano \(1969, 1970\)](#) y [Pagano & Hatfield \(1972\)](#) desarrollaron la solución tridimensional de la elasticidad para laminados bidireccionales simplemente apoyados, con esquemas de laminación simétricos y la orientación de las fibras limitadas a 0° y 90° . Sus resultados son ampliamente aceptados en la literatura como valores de referencia y comparación.

Una descripción alternativa implica una simplificación del modelo tridimensional al reducir el problema a dos dimensiones. Las teorías bidimensionales de placas simples se dividen, a grandes rasgos, en dos tipos: la teoría clásica en la cual los efectos de la deformación transversal por corte no son considerados, y, por el contrario, las teorías de deformación por corte, entre las cuales, la más simple es la de primer orden.

La Teoría Clásica de Placas (CPT, *Classical Plate Theory*), también denominada Teoría de Kirchhoff, considera que la deformación es puramente por flexión y estiramiento, desestimando las consecuencias de la deformación por corte. El error que genera esta simplificación se incrementa conforme lo hace el espesor de la placa. Se infiere apropiada para placas muy delgadas donde los efectos de la deformación por corte pueden ser despreciados. Los desplazamientos en el plano varían linealmente en el espesor. Presenta una inconsistencia entre el orden de las ecuaciones diferenciales y el número de condiciones de contorno ([Stoker, 1942](#)). Además, desde el punto de vista de la formulación por elementos finitos, se requiere continuidad C^1 en el plano, lo que resulta caro computacionalmente.

El primer modelo de deformación por corte basado en desplazamientos (*“displacement-based theory”*) es atribuido a [Basset \(1890, 1894\)](#), quien asumió que la cinemática de la placa puede ser expandida en serie de potencias de la coordenada del espesor. Siguiendo a [Basset, Hildebrand, Reissner & Thomas \(1949\)](#) y [Hencky \(1947\)](#) (citado por [Reddy, 2002](#)) presentaron un campo de desplazamientos para la teoría de primer orden. En la literatura, suele referirse como Teoría de [Mindlin \(1951\)](#), quien desarrolló un análisis dinámico para placas isótropas basándose en el trabajo de Hencky.

El modelo de Mindlin o Teoría de Deformación por Corte de Primer Orden (FSDT, *First-order Shear Deformation Theory*) es la descripción más simple que tiene en cuenta la deformación por corte, aunque con algunas limitaciones. La distribución de la deformación por corte transversal se asume constante a lo largo de espesor lo que requiere del uso de un factor de corrección para enmendar esta discrepancia con la realidad. Este coeficiente no sólo depende de las condiciones geométricas de la placa, sino que también del estado de carga así como de las condiciones de contorno ([Wang, Reddy & Lee, 2000](#)). En coincidencia con la CPT, asume la hipótesis de sección plana para cualquier instante. El orden de las ecuaciones diferenciales es coherente con la cantidad de condiciones de borde. En el marco de los elementos finitos, la continuidad necesaria en el plano es C^0 , lo que establece a este modelo computacionalmente más interesante que la CPT. No obstante, cuando los elementos finitos de bajo orden de interpolación tienen una alta relación lado/espesor (p.ej., cuando se modelan placas delgadas) son afectados por el problema numérico de bloqueo por corte (*“shear-locking”*). Diversas técnicas y/o elementos finitos se han desarrollado para aliviar este fenómeno, una completa descripción es dada por [Oñate \(2013\)](#).

Teorías de Deformación por Corte de Orden Superior (HSDT, *High-order Shear Deformation Theory*) emplean polinomios de orden superior en la descripción del campo de desplazamientos. Presentan una variación cuadrática de la tensión a lo largo de espesor, por lo que no requieren el uso de un factor de corrección. Sin embargo, emplean términos adicionales en la cinemática que son difíciles de interpretar físicamente.

Si bien las teorías mencionadas asumen la hipótesis de la normal transversal inextensible, esta puede ser relajada asumiendo que la deflexión transversal también varía a lo largo del espesor (p.ej., [Kant, 1982](#)).

Una teoría de deformación por corte asumiendo un estado de tensiones ("*stress-based theory*") fue presentada por [Reissner \(1944\)](#). El modelo parte de una distribución lineal a través del espesor de las tensiones en el plano. La distribución de las tensiones transversales es derivada de las ecuaciones de equilibrio de la Elasticidad tridimensional, presentando las tensiones de corte una variación cuadrática en el espesor, mientras la tensión normal, una distribución cúbica. [Goldenveizer, \(1960\)](#) generaliza este trabajo asumiendo una distribución arbitraria de tensiones a través del espesor. En la literatura, las teorías basadas en tensiones no han adquirido tanta atención como las basadas en desplazamientos, posiblemente debido a su mayor complejidad.

Las teorías previamente mencionadas han sido generalizadas para el estudio de placas compuestas, formando parte del denominado grupo de teorías de Única Capa Equivalente (ESL, *Equivalent Single Layer*). La principal hipótesis consiste en considerar a la placa heterogénea como una placa homogénea estáticamente semejante con un comportamiento constitutivo complejo. En el caso de la Teoría Clásica, al no considerar la deformación transversal, no tiene en cuenta todos los coeficientes elásticos del tensor Constitutivo para materiales ortótropos, obteniéndose resultados erróneos conforme se incrementa la magnitud de la rigidez en el plano de la placa respecto de su rigidez transversal. En tanto que en la Teoría de Primer Orden, el factor de corrección por corte depende también de la secuencia de laminado y de las propiedades de cada lámina, siendo su determinación no trivial ([Reddy, 2003](#)). Sin embargo, el valor 5/6 es frecuentemente utilizado aunque sea exacto sólo para placas homogéneas. [Auricchio & Sacco \(1999\)](#) desarrollaron una estrategia iterativa para determinar el factor de corrección por corte basada en la comparación entre las energías de corte derivadas de la relación Constitutiva y de las ecuaciones de equilibrio de la Elasticidad, mostrando como el factor de corrección puede ser bastante diferente de 5/6 y, a su vez, variar de un punto a otro dentro del dominio.

[Murthy \(1981\)](#) presentó una teoría de tercer orden que asume a la normal transversal inextensible, donde las variables de orden superior son eliminadas a partir de la condición de tensiones transversales nulas en ambas caras de la placa. El campo de desplazamientos es expresado en función de desplazamientos y rotaciones "promedios" en el espesor, mediante una aproximación por cuadrados mínimos. De este modo, el autor emplea las ecuaciones de equilibrio de la FSDT en su análisis, teniendo en cuenta los términos de orden superior solamente en el cálculo de las deformaciones, pero no en las ecuaciones de gobierno y condiciones de contorno. En el marco de elementos finitos, el modelo requiere continuidad C^1 en el plano para el desplazamiento transversal

[Reddy \(1986\)](#), extiende el trabajo de [Murthy \(1981\)](#), derivando las ecuaciones de equilibrio y condiciones de contorno completas. Nuevamente, el modelo de elementos finitos requiere continuidad C^1 en el plano para el desplazamiento en la coordenada del espesor. Sin embargo, este requisito de continuidad puede relajarse (*i.e.*, reducir continuidad C^1 a C^0) considerando una formulación mixta donde se aproximan en forma independiente los desplazamientos y las resultantes de tensiones.

[Kant & Pandya \(1988\)](#) presentaron una variante de la teoría de tercer orden en donde, a diferencia de [Reddy \(1986\)](#), la nulidad de las tensiones transversales de corte en las caras

superior e inferior de la placa son impuestas modificando la matriz de rigidez a corte, en lugar del campo de desplazamientos. Su formulación por elementos finitos requiere continuidad C^0 en el plano. Emplea integración reducida en los términos referidos al corte para evitar el efecto de bloqueo.

Modelos ESL basados en desplazamientos como incógnitas, generalmente, brindan una pobre representación las tensiones transversales, al no cumplir el equilibrio ente dos láminas adyacentes. Acorde a la Ley de Hooke, las tensiones fuera del plano pueden ser pensadas como una combinación de deformaciones multiplicadas por coeficientes que dependen del material de cada lámina. Normalmente, como las láminas poseen diferentes propiedades mecánicas, se deduce que las deformaciones también deben diferir para cumplir el equilibrio en la interfaz. Entonces, por ejemplo, si bien las Teorías de Tercer Orden exhiben una distribución parabólica de las deformaciones transversales por corte, al ser continuas en el espesor, conducen a que las tensiones transversales se discontinúen en las interfaces. Como solución, las tensiones fuera del plano son computadas mediante la integración de las ecuaciones de equilibrio de la Elasticidad 3D, lo que conlleva una pérdida de precisión.

Por consideraciones geométricas, las deformaciones son funciones de las derivadas de los desplazamientos. Por lo tanto, diferentes deformaciones implica diferentes pendientes de los desplazamientos (continuidad C^0 en el espesor). A partir de este concepto, surgen las denominadas Teorías *Zig-Zag* (ZZT, *Zig-Zag Theories*).

Entre las ZZT desarrolladas en el marco de las teorías ESL, tres enfoques diferentes son destacados según Carrera (2003a): Teoría Multicapas de Lekhnitskii (LMT, *Lekhnitskii Multilayered Theory*), Teoría Multicapas de Ambartsumian (AMT, *Ambartsumian Multilayered Theory*), y Teoría Multicapas de Reissner (RMT, *Reissner Multilayered Theory*). En el primer enfoque, el efecto *zig-zag* de los desplazamientos y la continuidad de las tensiones transversales son forzadas. En la segunda formulación, la continuidad de las tensiones transversales de corte es impuesta *a priori* y el campo de desplazamientos presenta discontinuidad de las primeras derivadas en la dirección del espesor. Por su parte, la última teoría emplea campos independientes para los desplazamientos y tensiones transversales (en efecto, una formulación “*mixta*”).

Dentro del marco de aplicación del RMT, Murakami (1986) introdujo en una función de la coordenada del espesor, cuya principal característica es que incorpora pendientes de signos opuesto entre dos capas adyacentes. Esta sencilla idea, reflejada en la Figura 2.1, permite alcanzar continuidad C^0 de los desplazamientos en el espesor. La implementación de dicha función ha sido llevada a cabo en el desarrollo tanto de elementos finitos mixtos así como de formulaciones basadas en desplazamientos (ver Carrera 2004, y Demasi, 2005). Desde el punto de vista de la implementación, la inclusión de funciones *zig-zag* requiere el mismo esfuerzo que la inclusión de un grado de libertad adicional. En términos numéricos, la incorporación de la función de Murakami resulta en mejoras significantes de los resultados de las teorías ESL existentes, con un mínimo aumento del costo computacional.

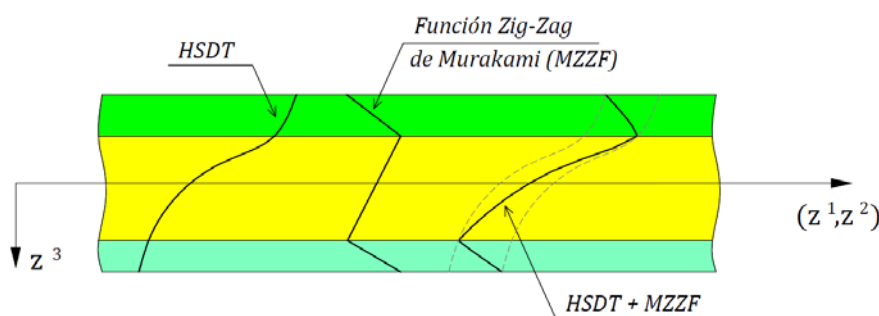


Figura 2.1: Campo de desplazamientos HSDT mejorado con la función *Zig-Zag* de Murakami.

Otro enfoque recientemente desarrollado emplea términos trigonométricos para formular el campo de desplazamientos no lineal a lo largo del espesor, dando lugar a las denominadas Teorías de Deformación por Corte Trigonométricas (TSDT, *Trigonometric Shear Deformation Theories*). Estos modelos satisfacen tanto la continuidad de desplazamientos y tensiones de corte transversal en las interfaces, así como las condiciones de contorno en las caras superior e inferior de la placa, prescindiendo de un factor de corrección por corte (p.ej., [Mantari et. al., 2012a/b](#)).

En general, la literatura reconoce a la Teoría de Primer Orden, más allá de sus limitaciones, como el modelo más eficiente entre precisión de resultados y costo computacional, a nivel respuesta global. No obstante, para un análisis detallado a nivel lámina, resultan más atractivas las denominadas Teorías Multicapas (LWT, *Layer-wise Theories*), en las cuales se analiza particularmente el comportamiento de cada lámina. A diferencia de las ESL, en los modelos LW el número de incógnitas depende del número de capas, por lo que se incrementa el costo computacional. El campo de desplazamientos es independiente en cada capa y condiciones de continuidad son requeridas en la interfaz entre dos capas adyacentes. Este enfoque quasi-3D permite captar la forma *zig-zag* de los desplazamientos en el espesor. La expansión de la cinemática puede ser parcial cuando sólo aplica a las componentes en el plano (*Partial Layer-wise Theory*), o completa, cuando también se incluye la componente transversal (*Full Layer-wise Theory*).

Dentro de ese marco, [Reddy \(1987\)](#) propone una generalización de la teoría bidimensional de placas multicapas (GLPT, *Generalized Laminate Plate Theory*) que admite una descripción por capas de los desplazamientos en el plano. El autor expresa los desplazamientos en el plano a través del espesor en términos de polinomios de Lagrange, donde los valores en las interfaces son usados como incógnitas. Esto permite cumplir fácilmente las condiciones de compatibilidad en la interfaz entre dos capas adyacentes. Esta descripción en la coordenada transversal puede interpretarse como una discretización espacial por elementos finitos con nodos en las interfaces. Implementaciones de este trabajo fueron realizadas por [Reddy, Barbero & Teply \(1989, 1990\)](#).

En comparación a los modelos FEM 3D, enfoques LW presentan algunas ventajas. En primer lugar, el volumen de entrada de datos es más reducido. Segundo, la malla 2D en el plano así como la malla transversal 1D pueden ser refinadas independientemente cada una de la otra sin necesidad de reconstruir una malla 3D. Por último, al computar las integrales sobre el volumen, los modelos LW pueden llevar a cabo la integración sobre el espesor explícitamente, reduciendo los esfuerzos computacionales para calcular la matriz de rigidez y/o masa. Igualmente, es importante destacar que los modelos FEM 3D representan un enfoque más general que los LW.

Los modelos LW basados en desplazamientos, si bien proporcionan una descripción más real de la cinemática de los laminados compuestos en comparación a las ZZT, no tienen en cuenta *a priori* la continuidad de las tensiones transversales. De hecho, tensiones transversales son generalmente evaluadas *a posteriori* integrando las ecuaciones de equilibrio de la Elasticidad 3D, como ya se ha mencionado para los modelos ESL. En este escenario, resulta conveniente el desarrollo de modelos LW mixtos, donde se asumen dos campos independientes para los desplazamientos y componentes transversales de las tensiones, a expensas de un mayor costo computacional.

[Mau \(1973\)](#), presentó un modelo LW donde cada capa presenta una distribución lineal de los desplazamientos en el plano, y constante de la componente transversal. Las condiciones de compatibilidad en cada interfaz asociadas a los desplazamientos en el plano son forzadas con multiplicadores de Lagrange, que permiten obtener las tensiones interlaminares de corte transversales directamente. [Alliney & Carnicer \(1992\)](#) presentaron un enfoque similar, donde además fuerzan la compatibilidad de la componente transversal de los desplazamientos.

Un extenso desarrollo de modelos mixtos basados en el Teorema variacional de [Reissner \(1986\)](#) ha sido objeto de estudio de [Carrera \(1997, 1998a/b, 1999, 2000a-c, 2003c\)](#). Diversos órdenes de expansión en el espesor son comparados, así como también la inclusión o no del efecto *zig-zag* y la continuidad interlaminar.

Enfoques LW y ESL (tanto basados en desplazamientos como mixtos) son unificados por [Carrera \(2002a/b, 2003b, 2005\)](#) (CUF, *Carrera's Unified Formulation*). La extensión de ese trabajo es continuada por [Demasi \(2009a-f, 2012\)](#) (GUF, *Generalized Unified Formulation*). En la GUF, cada incógnita, desplazamientos y tensiones transversales, es tratada independientemente, pudiendo ser diferente el orden de expansión de cada una. Esto permite centrar más atención en algunas variables respecto de otras (p.ej., para placas delgadas, el desplazamiento transversal requieren menos términos que los desplazamientos en el plano, pero para placas gruesas esto no es cierto). Al no haber límites para la combinación del orden de expansión de las variables, este enfoque representa uno muy general.

Existen una gran cantidad de teorías y enfoques de placas (y cáscaras), cada una con sus aspectos particulares. Una revisión breve y general de las teorías de placas ha sido presentada, aunque no completa debido a la gran cantidad de artículos disponibles en la literatura. Para un resumen más detallado de las teorías para placas multicapas se recomienda ver [Carrera \(2002c\)](#) y [Rohwer et. al. \(2005\)](#).

3 TEORÍA DE PLACAS MULTICAPAS

3.1 Formulación Variacional

Una descripción de placas multicapas puede ser obtenida analizando cada capa como una placa homogénea, donde cada una representa un elemento en el espesor.

Se parte de una placa compuesta de n capas en equilibrio estático definida en un sistema de coordenadas cartesianas fijo $\{z^\alpha, \alpha = 1,2,3\}$, tal como se observa en la [Figura 3.1](#). El sólido, empotrado en su borde Γ , se encuentra bajo la acción de fuerzas de volumen y fuerzas superficiales. Se asumen deformaciones infinitesimales y pequeños desplazamientos, por lo que no se hace distinción alguna entre coordenadas materiales y coordenadas espaciales. Del mismo modo, el tensor de deformaciones de Green-Lagrange se confunde con el tensor de deformaciones infinitesimales, así como el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff con el tensor de tensiones de Cauchy.

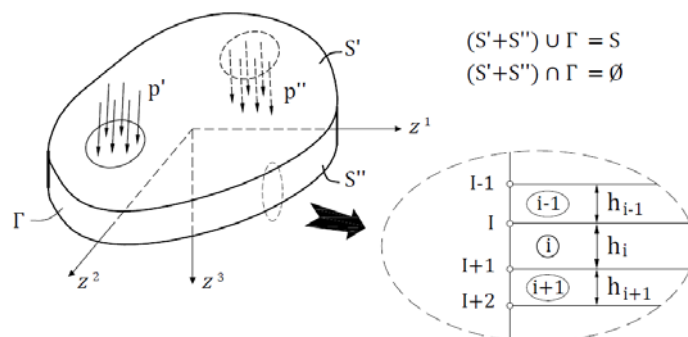


Figura 3.1: Placa en equilibrio estático.

El comportamiento conjunto de las placas que conforman el sistema requiere la continuidad de desplazamientos en cada interfaz de capas adyacentes, para lo cual se imponen las siguientes restricciones cinemáticas,

$$u_\alpha^{(i)} = u_\alpha^{(i+1)} \tag{3.1}$$

donde $u_\alpha^{(i)}$ son las componentes del vector desplazamiento de las fibras inferiores de la capa superior, mientras que $u_\alpha^{(i+1)}$ son las correspondientes a las fibras superiores de la capa inferior.

El sistema multicapas se obtiene como una superposición de n placas simples, donde los requisitos de continuidad cinemática son asegurados matemáticamente a partir de la inclusión de multiplicadores de Lagrange. El funcional de la energía potencial total Π para el sistema se expresa como,

$$\begin{aligned} \Pi = & \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{V^{(i)}} \left(\frac{1}{2} \sigma_{\alpha\beta}^{(i)} \varepsilon_{\alpha\beta}^{(i)} - b_\alpha^{(i)} u_\alpha^{(i)} \right) dV \right\} + \\ & + \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \int_{S^{(j+1)}} \left(u_\alpha^{(j+1)} - u_\alpha^{(j)} \right) \lambda_\alpha^{(j+1)} dS \right\} + \\ & - \int_{S^{(1)}} p'_\alpha u_\alpha^{(1)} dS - \int_{S^{(n+1)}} p''_\alpha u_\alpha^{(n)} dS \end{aligned} \tag{3.2}$$

donde $\sigma_{\alpha\beta}$ y $\varepsilon_{\alpha\beta}$ son las componentes cartesianas de los tensores de segundo orden de tensiones de Cauchy y de deformaciones infinitesimales, respectivamente, u_α son las componentes cartesianas del vector desplazamientos, b_α son las componentes cartesianas del vector fuerzas por unidad de volumen, p'_α y p''_α son las componentes cartesianas del vector fuerzas por unidad de superficie aplicado en la superficie superior de la primera capa y en la

superficie inferior de la última capa, respectivamente, y λ_α son los multiplicadores de Lagrange. El superíndice a derecha $\langle \cdot \rangle$ refiere al número de capa o de interfaz, según sea definido en el volumen V o en la superficie S , respectivamente.

El principio asociado al funcional (3.2) puede ser considerado una modificación del principio de la energía potencial con requerimientos de continuidad relajados, donde las funciones de desplazamientos en cada subdominio pueden ser elegidas independientemente sin ningún tipo de preocupación sobre requisitos de conformidad (Washizu, 1975).

Las condiciones de borde esenciales o de tipo Dirichlet son,

$$u_\alpha = 0 \quad \text{en } \Gamma \quad (3.3)$$

Se asume un modelo de material hiperelástico cuya relación constitutiva está dada por,

$$\sigma_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta\gamma\mu} \varepsilon_{\gamma\mu} \quad (3.4)$$

donde $C_{\alpha\beta\gamma\mu}$ son las componentes cartesianas del tensor Constitutivo de cuarto orden para sólidos elásticos, que satisfacen las siguientes relaciones de simetría,

$$C_{\alpha\beta\gamma\mu} = C_{\gamma\mu\alpha\beta} = C_{\beta\alpha\gamma\mu} = C_{\alpha\beta\mu\gamma}$$

Reemplazando (3.4) en la expresión del funcional,

$$\begin{aligned} \Pi = & \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{V^{(i)}} \left(\frac{1}{2} C_{\alpha\beta\gamma\mu}^{(i)} \varepsilon_{\gamma\mu}^{(i)} \varepsilon_{\alpha\beta}^{(i)} - b_\alpha^{(i)} u_\alpha^{(i)} \right) dV \right\} + \\ & + \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \int_{S^{(j+1)}} \left(u_\alpha'^{(j+1)} - u_\alpha''^{(j)} \right) \lambda_\alpha^{(j+1)} dS \right\} + \\ & - \int_{S^{(1)}} p'_\alpha u_\alpha'^{(1)} dS - \int_{S^{(n+1)}} p''_\alpha u_\alpha''^{(n)} dS \end{aligned} \quad (3.5)$$

Introduciendo la definición del tensor de deformaciones infinitesimales,

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} \right) \quad (3.6)$$

el funcional de la energía, finalmente, puede reescribirse en términos de los desplazamientos y de los multiplicadores de Lagrange,

$$\begin{aligned} \Pi(u_\alpha^{(i)}, \lambda_\alpha^{(j+1)}) = & \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{V^{(i)}} \left(\frac{1}{2} C_{\alpha\beta\gamma\mu}^{(i)} u_{\gamma,\mu}^{(i)} u_{\alpha,\beta}^{(i)} - b_\alpha^{(i)} u_\alpha^{(i)} \right) dV \right\} + \\ & + \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \int_{S^{(j+1)}} \left(u_\alpha'^{(j+1)} - u_\alpha''^{(j)} \right) \lambda_\alpha^{(j+1)} dS \right\} + \\ & - \int_{S^{(1)}} p'_\alpha u_\alpha'^{(1)} dS - \int_{S^{(n+1)}} p''_\alpha u_\alpha''^{(n)} dS \end{aligned} \quad (3.7)$$

Expresión en la cual se aprovecha la simetría de los tensores involucrados,

$$\frac{C_{\alpha\beta\gamma\mu} \varepsilon_{\gamma\mu}}{\sigma_{\alpha\beta}} \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{C_{\alpha\beta\gamma\mu} u_{\gamma,\mu}}{\sigma_{\alpha\beta}} u_{\alpha,\beta}$$

Tomando la variación del funcional,

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{V^{(i)}} \left(\sigma_{\alpha\beta}^{(i)} \delta u_{\alpha,\beta}^{(i)} - b_\alpha^{(i)} \delta u_\alpha^{(i)} \right) dV \right\} + \\ & + \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \int_{S^{(j+1)}} \left(\lambda_\alpha^{(j+1)} \delta u_\alpha'^{(j+1)} - \lambda_\alpha^{(j+1)} \delta u_\alpha''^{(j)} \right) dS \right\} + \\ & + \int_{S^{(j+1)}} \left(u_\alpha'^{(j+1)} - u_\alpha''^{(j)} \right) \delta \lambda_\alpha^{(j+1)} dS \right\} + \\ & - \int_{S^{(1)}} p'_\alpha \delta u_\alpha'^{(1)} dS - \int_{S^{(n+1)}} p''_\alpha \delta u_\alpha''^{(n)} dS \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde δ simboliza el operador variacional. Aplicando la relación matemática:

$$(\sigma_{\alpha\beta} \delta u_\alpha)_{,\beta} = \sigma_{\alpha\beta,\beta} \delta u_\alpha + \sigma_{\alpha\beta} \delta u_{\alpha,\beta} \quad (3.9)$$

y el Teorema de Gauss o de la Divergencia,

$$\int_V (\sigma_{\alpha\beta} \delta u_\alpha)_{,\beta} dV = \int_{S'} \sigma_{\alpha 3} n'_3 \delta u'_\alpha dS + \int_{S''} \sigma_{\alpha 3} n''_3 \delta u''_\alpha dS \quad (3.10)$$

la condición estacionaria resulta,

$$\begin{aligned} \delta \Pi = & \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{V^{(i)}} \left(\sigma_{\alpha\beta,\beta}^{(i)} + b_\alpha^{(i)} \right) \delta u_\alpha^{(i)} dV + \right. \\ & \left. - \int_{S^{(i)}} \sigma_{\alpha 3}^{(i)} n'_3 \delta u'_\alpha^{(i)} dS - \int_{S^{(i+1)}} \sigma_{\alpha 3}^{(i)} n''_3 \delta u''_\alpha^{(i)} dS \right\} + \\ & + \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \int_{S^{(j+1)}} \left(\lambda_\alpha^{(j+1)} \delta u_\alpha^{(j)} - \lambda_\alpha^{(j+1)} \delta u_\alpha^{(j+1)} \right) dS + \right. \\ & \left. - \int_{S^{(j+1)}} \left(u_\alpha^{(j+1)} - u_\alpha^{(j)} \right) \delta \lambda_\alpha^{(j+1)} dS \right\} + \\ & + \int_{S^{(1)}} p'_\alpha \delta u_\alpha^{(1)} dS + \int_{S^{(n+1)}} p''_\alpha \delta u_\alpha^{(n)} dS = 0 \quad (3.11) \end{aligned}$$

donde n'_3 y n''_3 son las componentes de la normal saliente de la superficie superior S' e inferior S'' de cada capa, respectivamente (Figura 3.2),

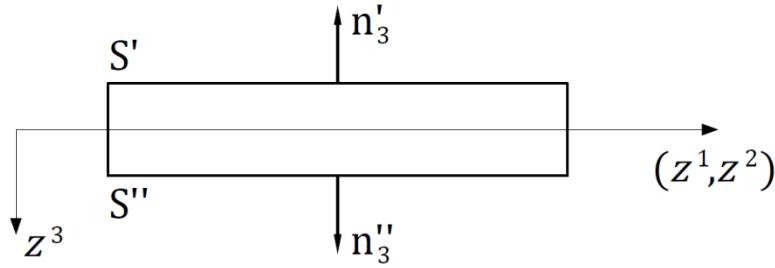


Figura 3.2: Normal saliente a la superficie superior e inferior de una capa genérica.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange del problema variacional son, en forma localizada,

$$\delta u_\alpha^{(i)} : \quad \sigma_{\alpha\beta,\beta}^{(i)} + b_\alpha^{(i)} = 0 \quad \text{en } V^{(i)} \quad i = 1, \dots, n \quad (3.12)$$

$$\delta u_\alpha^{(1)} : \quad \sigma_{\alpha 3}^{(1)} n'_3 - p'_\alpha = 0 \quad \text{en } S^{(1)} \quad (3.13)$$

$$\delta u_\alpha^{(i)} : \quad \sigma_{\alpha 3}^{(i)} n'_3 + \lambda_\alpha^{(i)} = 0 \quad \text{en } S^{(i)} \quad i = 2, \dots, n \quad (3.14)$$

$$\delta u_\alpha^{(i)} : \quad \sigma_{\alpha 3}^{(i)} n''_3 - \lambda_\alpha^{(i+1)} = 0 \quad \text{en } S^{(i)} \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (3.15)$$

$$\delta u_\alpha^{(n)} : \quad \sigma_{\alpha 3}^{(n)} n''_3 - p''_\alpha = 0 \quad \text{en } S^{(n)} \quad (3.16)$$

$$\delta \lambda_\alpha^{(i)} : \quad u_\alpha^{(i)} - u_\alpha^{(i-1)} = 0 \quad \text{en } S^{(i)} \quad i = 2, \dots, n \quad (3.17)$$

La ecuación (3.12) implica cumplir con las Ecuaciones de Equilibrio o Balance de Momento Lineal en el dominio de cada capa. Las ecuaciones (3.13) y (3.16) describen la condición de borde natural en la cara superior de la primera capa y en la cara inferior de la última capa, respectivamente. Las expresiones (3.14) y (3.15) definen a los multiplicadores de Lagrange como las tensiones interlaminares en las interfaces entre capas. El sentido físico de los multiplicadores de Lagrange se justifica. Se deduce que cumplir con la restricción (3.1) asegura

el equilibrio de las tensiones interlaminares (Figura 3.3). Finalmente, la ecuación (3.17) representa la restricción impuesta que fuerza la continuidad cinemática.

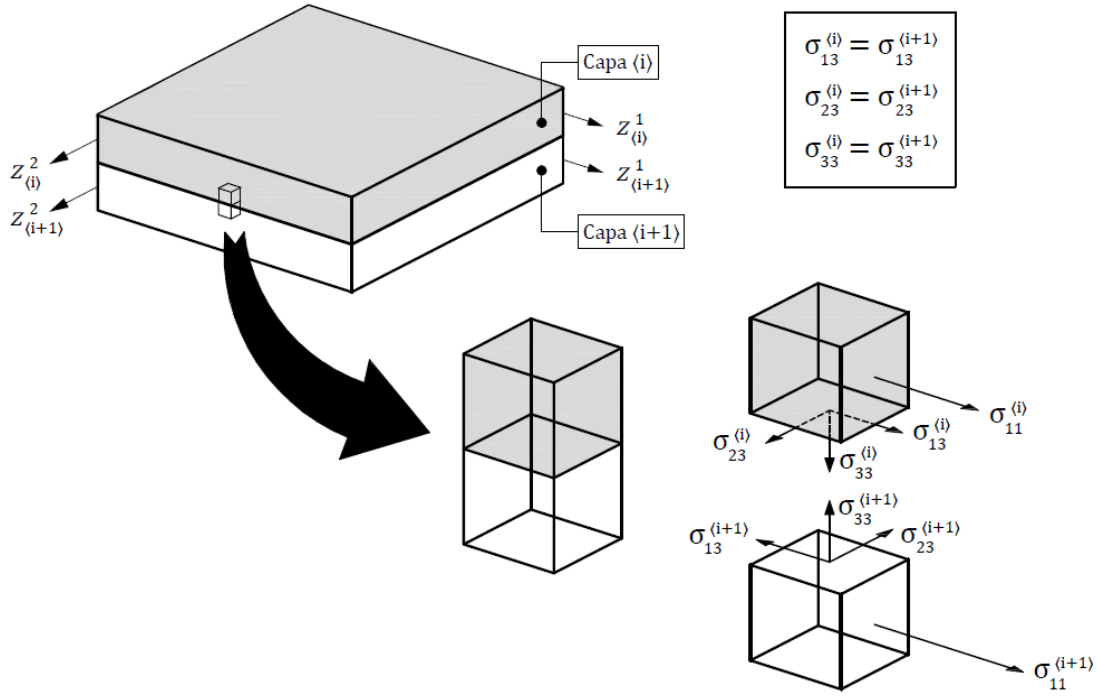


Figura 3.3: Equilibrio de las tensiones interlaminares.

El funcional obtenido representa un principio variacional mixto, dado que las incógnitas no son sólo desplazamientos, sino también tensiones dadas por el empleo de los multiplicadores de Lagrange. La expresión (3.2) puede ser interpretada como una formulación híbrida en el espesor. Este enfoque resulta muy general en el sentido de que no se ha introducido, hasta el momento, ninguna hipótesis respecto del campo de desplazamientos en el interior de cada capa.

3.2 Cinemática

Sea una placa compuesta de n capas de altura h_i , perfectamente ligadas y cuyas propiedades mecánicas pueden diferir, se define un sistema particular de coordenadas Cartesianas $\{z^\alpha, \alpha = 1,2,3\}$ para cada capa en su respectiva superficie media Ω_i , donde (z^1, z^2) son las coordenadas en el plano, (z^3) es la coordenada transversal (Figura 3.4). La cara superior de cada una se ubica en $z^3 = -h_i/2$, y la inferior, en $z^3 = +h_i/2$. Todas las capas son asumidas a tener las mismas dimensiones en el plano (i.e., $\Omega = \Omega^{(1)} = \Omega^{(2)} = \dots = \Omega^{(n)}$). La región ocupada por cada lámina en su configuración inicial es $\Omega^{(i)} \times (-h_i/2, h_i/2)$. El perímetro $\bar{\Gamma}$ de cada una de las mismas está sujeto a una combinación de fuerzas en $\bar{\Gamma}_\sigma$ y desplazamientos en $\bar{\Gamma}_u$, en el caso más general, cumpliéndose:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_\sigma \cup \bar{\Gamma}_u &= \bar{\Gamma} \\ \bar{\Gamma}_\sigma \cap \bar{\Gamma}_u &= \emptyset \end{aligned} \quad (3.18)$$

Tal como se mencionó previamente, el campo de desplazamientos para un punto $\{z^\alpha\}$ puede ser expandido en series de potencias de la coordenada transversal z^3 (Basset, 1890),

$$u_\alpha(z^1, z^2, z^3, t) = u_\alpha|_{z^3=0} + u_{\alpha,3}|_{z^3=0} z^3 + \frac{1}{2!} u_{\alpha,33}|_{z^3=0} (z^3)^2 + \dots \quad (3.19)$$

Adoptando la Teoría de Mindlin, se introducen las siguientes hipótesis:

- 1- La normal transversal no permanece perpendicular a la superficie media después de la deformación.
- 2- Las fibras rectas a la superficie media de la placa se mantienen rectas a la superficie media deformada.
- 3- La normal transversal es inextensible.

La primera condición surge como efecto de la deformación transversal por corte, constante en el espesor debido a la segunda hipótesis. Por su parte, la tercera implica que el desplazamiento transversal es independiente de la coordenada transversal z^3 y que la deformación normal transversal ε_{33} es nula.

De este modo, el campo de desplazamientos para un punto $\{z^\alpha\}$ de una capa genérica i en el instante "t" queda definido como,

$$\begin{aligned} u_1^{(i)}(z^1, z^2, z^3, t) &= u_{o1}^{(i)}(z^1, z^2, t) - z^3 \beta_1^{(i)}(z^1, z^2, t) \\ u_2^{(i)}(z^1, z^2, z^3, t) &= u_{o2}^{(i)}(z^1, z^2, t) - z^3 \beta_2^{(i)}(z^1, z^2, t) \\ u_3^{(i)}(z^1, z^2, z^3, t) &= w^{(i)}(z^1, z^2, t) \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde $\underline{u}_o = [u_{o1}, u_{o2}]^T$ son desplazamientos axiales en la superficie media Ω de la capa, $\underline{\beta} = [\beta_1, \beta_2]^T$ son rotaciones de la normal transversal alrededor de los ejes z^2, z^1 respectivamente, y w es el desplazamiento transversal constante en el espesor.

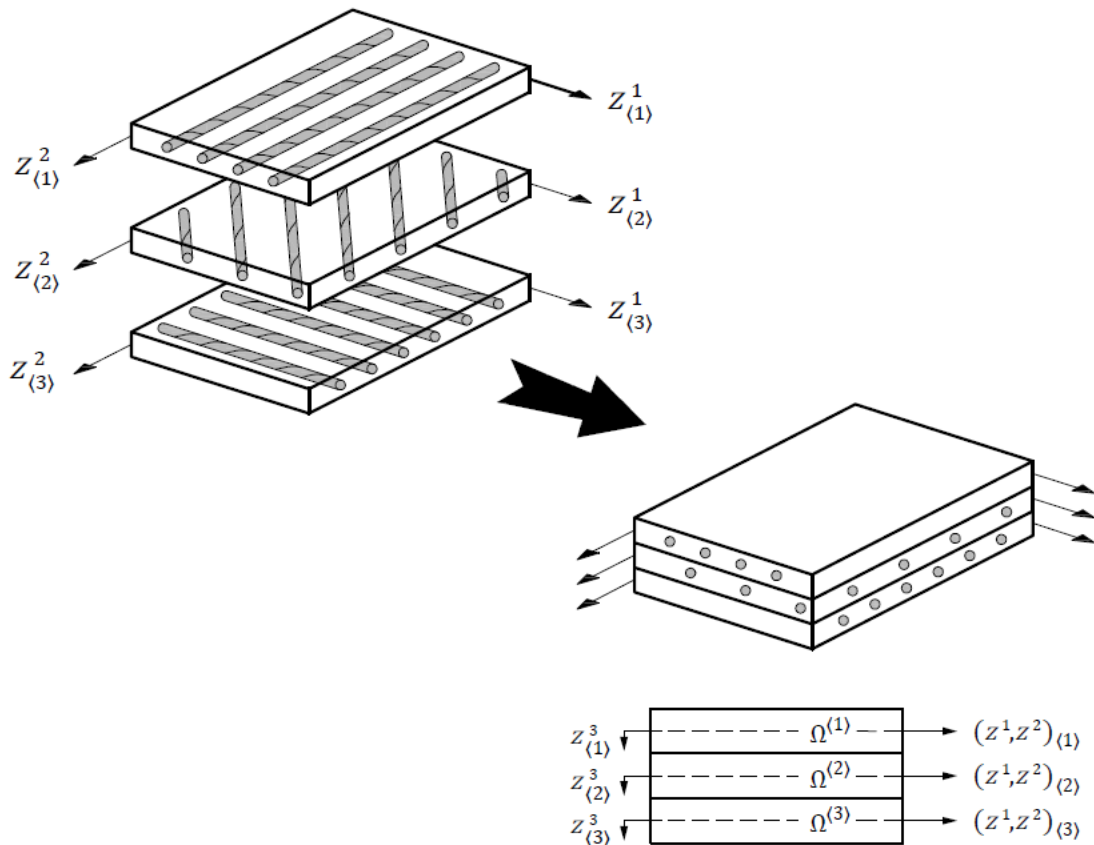


Figura 3.4: Placa compuesta de tres capas.

La expresión (3.20) representa la manera más simple de incluir los efectos de la deformación transversal por corte, al considerar solamente los dos primeros términos de la ecuación (3.19).

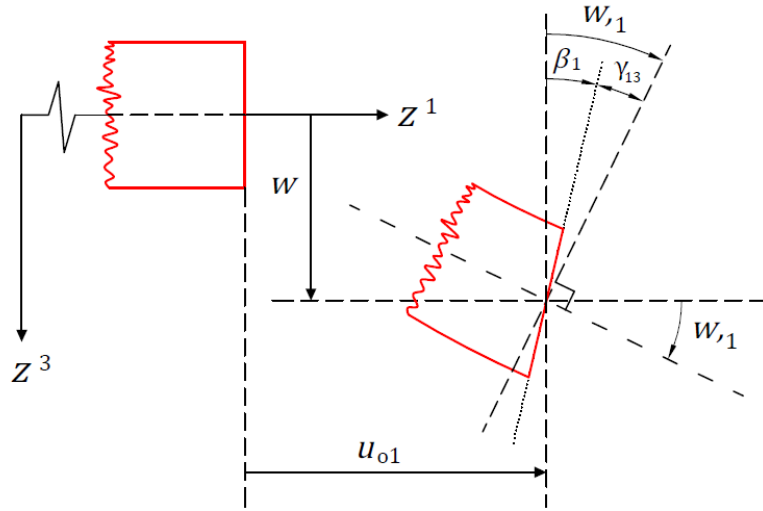


Figura 3.5: Configuración inicial y deformada del modelo de Mindlin.

De la [Figura 3.5](#), se asume que la cinemática del modelo se justifica para pequeños desplazamientos. Reemplazando (3.20) en (3.6), las componentes cartesianas del tensor de deformaciones infinitesimales en cada capa quedan definidas, en forma explícita, como,

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11}^{(i)} &= u_{o1,1}^{(i)} - z^3 \beta_{1,1}^{(i)} \\
 \varepsilon_{22}^{(i)} &= u_{o2,2}^{(i)} - z^3 \beta_{2,2}^{(i)} \\
 \varepsilon_{33}^{(i)} &= 0 \\
 \gamma_{13}^{(i)} &\equiv 2\varepsilon_{13}^{(i)} = w_{,1}^{(i)} - \beta_1^{(i)} \\
 \gamma_{23}^{(i)} &\equiv 2\varepsilon_{23}^{(i)} = w_{,2}^{(i)} - \beta_2^{(i)} \\
 \gamma_{12}^{(i)} &\equiv 2\varepsilon_{12}^{(i)} = (u_{o1,2}^{(i)} + u_{o2,1}^{(i)}) - z^3 (\beta_{1,2}^{(i)} - \beta_{2,1}^{(i)})
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

A diferencia de la deformación en el plano $\underline{\varepsilon}_p = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \gamma_{12}]^T$ que es lineal a lo largo del espesor, la deformación transversal por corte $\underline{\varepsilon}_t = [\varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}]^T$ se asume constante en cada lámina, como ya se ha comentado.

Dado el campo de desplazamientos de cada capa, las restricciones cinemáticas dadas por la ecuación (3.1) pueden reescribirse de la siguiente manera:

1. Los desplazamientos $u_1^{(i)}(z^1, z^2, h_i/2, t)$ y $u_2^{(i)}(z^1, z^2, h_i/2, t)$ en la interfaz I+1,

$$\begin{aligned}
 u_1^{(i)}(z^1, z^2, h_i/2, t) &= u_{o1}^{(i)}(z^1, z^2, t) - \frac{h_i}{2} \beta_1^{(i)}(z^1, z^2, t) \\
 u_2^{(i)}(z^1, z^2, h_i/2, t) &= u_{o2}^{(i)}(z^1, z^2, t) - \frac{h_i}{2} \beta_2^{(i)}(z^1, z^2, t)
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

deben ser coincidir en dicha interfaz con los desplazamientos $u_1^{(i+1)}(z^1, z^2, -h_{i+1}/2, t)$ y $u_2^{(i+1)}(z^1, z^2, -h_{i+1}/2, t)$,

$$\begin{aligned}
 u_1^{(i+1)}(z^1, z^2, -h_{i+1}/2, t) &= u_{o1}^{(i+1)}(z^1, z^2, t) + \frac{h_{i+1}}{2} \beta_1^{(i+1)}(z^1, z^2, t) \\
 u_2^{(i+1)}(z^1, z^2, -h_{i+1}/2, t) &= u_{o2}^{(i+1)}(z^1, z^2, t) + \frac{h_{i+1}}{2} \beta_2^{(i+1)}(z^1, z^2, t)
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Es decir,

$$u_1^{(i)}(z^1, z^2, h_i/2, t) = u_1^{(i+1)}(z^1, z^2, -h_{i+1}/2, t) \tag{3.24}$$

$$u_2^{(i)}(z^1, z^2, h_i/2, t) = u_2^{(i+1)}(z^1, z^2, -h_{i+1}/2, t) \tag{3.25}$$

2. Los desplazamientos verticales $w^{(i)}$ de la capa i deben ser los mismos que los desplazamientos verticales $w^{(i+1)}$ de la capa $i + 1$,

$$w^{(i)}(z^1, z^2, t) = w^{(i+1)}(z^1, z^2, t) \quad (3.26)$$

El campo de desplazamientos resultante para el sistema multicapas se presenta en la Figura 3.6.

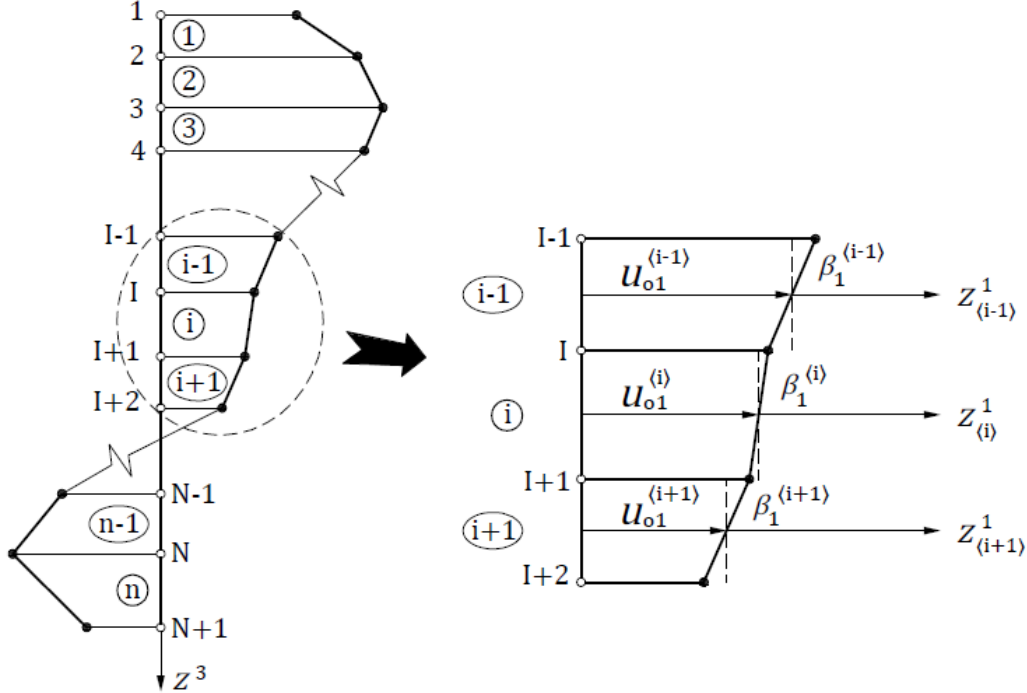


Figura 3.6: Campo de desplazamientos en el espesor del modelo multicapas.

3.3 Ecuaciones de Equilibrio

Las ecuaciones que gobiernan el problema se consiguen planteando el Principio de Hamilton (Fung, 1965; Reddy, 2002),

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\Pi - T) dt = 0 \quad (3.27)$$

donde Π y T representan la energía potencial y cinética total del sistema multicapas, respectivamente.

La variación del primer funcional se obtiene reemplazando en la expresión (3.8) el campo de desplazamientos asumido,

$$\begin{aligned} \delta \Pi = & \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{\Omega^{(i)}} \int_{-\frac{h_i}{2}}^{+\frac{h_i}{2}} \left[\sigma_{AB}^{(i)} \delta u_{oA,B}^{(i)} - \sigma_{AB}^{(i)} z^3 \delta \beta_{A,B}^{(i)} + \sigma_{A3}^{(i)} (\delta w_{,A}^{(i)} - \delta \beta_A^{(i)}) \right] dz^3 d\Omega \right\} + \\ & + \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \int_{S^{(j+1)}} \left[\lambda_A^{(j+1)} \left(\delta u_{oA}^{(j+1)} + \frac{h_{j+1}}{2} \delta \beta_A^{(j+1)} \right) - \lambda_A^{(j+1)} \left(\delta u_{oA}^{(j)} - \frac{h_j}{2} \delta \beta_A^{(j)} \right) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left(u_{oA}^{(j+1)} + \frac{h_{j+1}}{2} \beta_A^{(j+1)} \right) \delta \lambda_A^{(j+1)} - \left(u_{oA}^{(j)} - \frac{h_j}{2} \beta_A^{(j)} \right) \delta \lambda_A^{(j+1)} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \lambda_3^{(j+1)} \delta w^{(j+1)} - \lambda_3^{(j+1)} \delta w^{(j)} + (w^{(j+1)} - w^{(j)}) \delta \lambda_3^{(j+1)} \right] dS \right\} - \int_{\Omega^{(1)}} q \delta w^{(1)} d\Omega \quad (3.28) \end{aligned}$$

donde q representa la carga transversal aplicada en la superficie superior de la placa multicapas. Se omiten otras fuerzas externas. Por simplicidad, se asumen condiciones de

borde de tipo Dirichlet homogéneas (*i.e.*, perímetro totalmente empotrado). La integración sobre el dominio es representada como,

$$\int_V(\cdot) dV = \int_{\Omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (\cdot) dz^3 d\Omega \quad (3.29)$$

a causa del campo de desplazamientos en la coordenada transversal. Así, el problema se reduce a dos dimensiones al llevar a cabo la integración sobre el espesor de cada capa explícitamente,

$$\begin{aligned} N_{AB}^{(i)} &= \int_{-\frac{h_i}{2}}^{+\frac{h_i}{2}} \sigma_{AB}^{(i)} dz^3 \\ M_{AB}^{(i)} &= \int_{-\frac{h_i}{2}}^{+\frac{h_i}{2}} \sigma_{AB}^{(i)} z^3 dz^3 \\ Q_A^{(i)} &= \int_{-\frac{h_i}{2}}^{+\frac{h_i}{2}} \sigma_{A3}^{(i)} dz^3 \end{aligned} \quad (3.30)$$

Las resultantes de tensiones N_{AB} son las denominadas fuerzas resultantes en el plano (Figura 3.7) mientras que M_{AB} son los llamados momentos resultantes (Figura 3.8). Por su parte, Q_A son las resultantes de corte transversal (Figura 3.9). Todos medidos por unidad de longitud. Se reescribe la expresión (3.28) como,

$$\begin{aligned} \delta\Pi &= \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{\Omega^{(i)}} \left[N_{AB}^{(i)} \delta u_{oA,B}^{(i)} - M_{AB}^{(i)} \delta \beta_{A,B}^{(i)} + Q_A^{(i)} (\delta w_{,A}^{(i)} - \delta \beta_A^{(i)}) \right] d\Omega \right\} + \\ &+ \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \int_{S^{(j+1)}} \left[\lambda_A^{(j+1)} \left(\delta u_{oA}^{(j+1)} + \frac{h_{j+1}}{2} \delta \beta_A^{(j+1)} \right) - \lambda_A^{(j+1)} \left(\delta u_{oA}^{(j)} - \frac{h_j}{2} \delta \beta_A^{(j)} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(u_{oA}^{(j+1)} + \frac{h_{j+1}}{2} \beta_A^{(j+1)} \right) \delta \lambda_A^{(j+1)} - \left(u_{oA}^{(j)} - \frac{h_j}{2} \beta_A^{(j)} \right) \delta \lambda_A^{(j+1)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \lambda_3^{(j+1)} \delta w^{(j+1)} - \lambda_3^{(j+1)} \delta w^{(j)} + (w^{(j+1)} - w^{(j)}) \delta \lambda_3^{(j+1)} \right] dS \right\} - \int_{\Omega^{(1)}} q \delta w^{(1)} d\Omega \quad (3.31) \end{aligned}$$

Integrando por partes (Teorema de Green) en el dominio de cada capa,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^{(i)}} N_{AB}^{(i)} \delta u_{oA,B}^{(i)} d\Omega &= - \int_{\Omega^{(i)}} N_{AB,B}^{(i)} \delta u_{oA}^{(i)} d\Omega + \oint_{\Gamma_i} N_{AB}^{(i)} \delta u_{oA}^{(i)} n_B d\bar{\Gamma} \\ \int_{\Omega^{(i)}} M_{AB}^{(i)} \delta \beta_{A,B}^{(i)} d\Omega &= - \int_{\Omega^{(i)}} M_{AB,B}^{(i)} \delta \beta_A^{(i)} d\Omega + \oint_{\Gamma_i} M_{AB}^{(i)} \delta \beta_A^{(i)} n_B d\bar{\Gamma} \\ \int_{\Omega^{(i)}} Q_A^{(i)} \delta w_{,A}^{(i)} d\Omega &= - \int_{\Omega^{(i)}} Q_{A,A}^{(i)} \delta w^{(i)} d\Omega + \oint_{\Gamma_i} Q_A^{(i)} \delta w^{(i)} n_A d\bar{\Gamma} \end{aligned} \quad (3.32)$$

la variación del funcional resulta,

$$\begin{aligned} \delta\Pi &= \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{\Omega^{(i)}} \left[-N_{AB,B}^{(i)} \delta u_{oA}^{(i)} + \left(M_{AB,B}^{(i)} - Q_A^{(i)} \right) \delta \beta_A^{(i)} - Q_{A,A}^{(i)} \delta w^{(i)} \right] d\Omega + \right. \\ &\quad \left. + \oint_{\Gamma_i} \left[N_{AB}^{(i)} \delta u_{oA}^{(i)} n_B - M_{AB}^{(i)} \delta \beta_A^{(i)} n_B + Q_A^{(i)} \delta w^{(i)} n_A \right] d\bar{\Gamma} \right\} + \\ &+ \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \int_{S^{(j+1)}} \left[\lambda_A^{(j+1)} \left(\delta u_{oA}^{(j+1)} + \frac{h_{j+1}}{2} \delta \beta_A^{(j+1)} \right) - \lambda_A^{(j+1)} \left(\delta u_{oA}^{(j)} - \frac{h_j}{2} \delta \beta_A^{(j)} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(u_{oA}^{(j+1)} + \frac{h_{j+1}}{2} \beta_A^{(j+1)} \right) \delta \lambda_A^{(j+1)} - \left(u_{oA}^{(j)} - \frac{h_j}{2} \beta_A^{(j)} \right) \delta \lambda_A^{(j+1)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \lambda_3^{(j+1)} \delta w^{(j+1)} - \lambda_3^{(j+1)} \delta w^{(j)} + (w^{(j+1)} - w^{(j)}) \delta \lambda_3^{(j+1)} \right] dS \right\} - \int_{\Omega^{(1)}} q \delta w^{(1)} d\Omega \quad (3.33) \end{aligned}$$

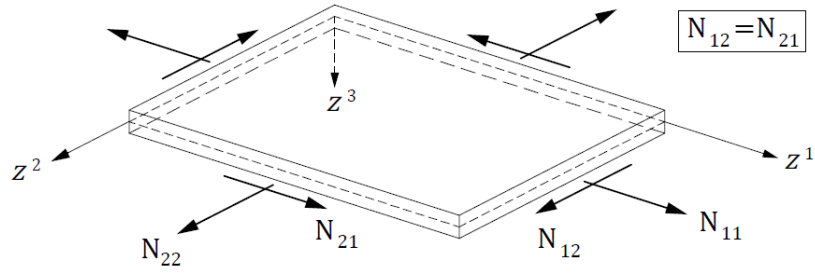


Figura 3.7: Fuerzas resultantes en el plano de la placa.

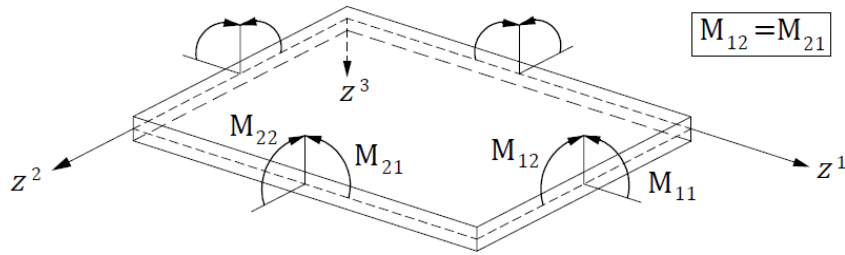


Figura 3.8: Momentos resultantes en la placa.

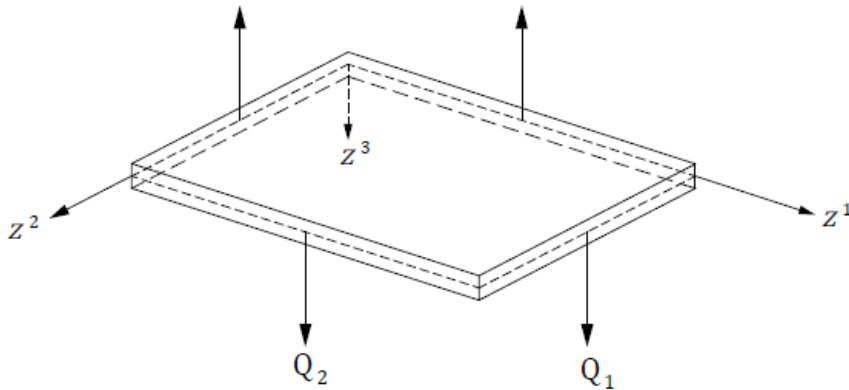


Figura 3.9: Fuerzas resultantes de corte transversal al plano de la placa.

Por otro lado, la energía cinética está dada por,

$$T = \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{\Omega^{(i)}} \int_{-\frac{h_i}{2}}^{+\frac{h_i}{2}} \frac{1}{2} \rho_i (\dot{u}_A^{(i)} \dot{u}_A^{(i)} + \dot{w}^{(i)} \dot{w}^{(i)}) dz^3 d\Omega \right\} \quad (3.34)$$

donde ρ_i es la densidad del material de la respectiva capa. La integración sobre el dominio es materializada, nuevamente, según la expresión (3.29). El punto superior indica la derivada respecto de la variable tiempo, $(\dot{}) = \frac{d()}{dt}$.

Incorporando el campo de desplazamientos en la expresión (3.34), integrando en el espesor y tomando la variación del funcional,

$$\delta T = \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{\Omega^{(i)}} \left(\rho_i h_i \dot{u}_{oA}^{(i)} \delta \dot{u}_{oA}^{(i)} + \rho_i \frac{h_i^3}{12} \dot{\beta}_A^{(i)} \delta \dot{\beta}_A^{(i)} + \rho_i h_i \dot{w}^{(i)} \delta \dot{w}^{(i)} \right) d\Omega \right\} \quad (3.35)$$

Integrando por partes,

$$\delta T = - \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{\Omega^{(i)}} \left(\rho_i h_i \ddot{u}_{oA}^{(i)} \delta u_{oA}^{(i)} + \rho_i \frac{h_i^3}{12} \ddot{\beta}_A^{(i)} \delta \beta_A^{(i)} + \rho_i h_i \ddot{w}^{(i)} \delta w^{(i)} \right) d\Omega \right\} \quad (3.36)$$

Reemplazando (3.33) y (3.36) en (3.27),

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{\Omega^{(i)}} \left[\left(\rho_i h_i \ddot{u}_{oA}^{(i)} - N_{AB,B}^{(i)} \right) \delta u_{oA}^{(i)} + \left(\rho_i \frac{h_i^3}{12} \ddot{\beta}_A^{(i)} + M_{AB,B}^{(i)} - Q_A^{(i)} \right) \delta \beta_A^{(i)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\rho_i h_i \ddot{w}^{(i)} - Q_{A,A}^{(i)} \right) \delta w^{(i)} \right] d\Omega + \right. \\ \left. + \oint_{\Gamma_i} \left[N_{AB}^{(i)} \delta u_{oA}^{(i)} n_B - M_{AB}^{(i)} \delta \beta_A^{(i)} n_B + Q_A^{(i)} \delta w^{(i)} n_A \right] d\bar{\Gamma} \right\} + \\ + \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \int_{S^{(j+1)}} \left[\lambda_A^{(j+1)} \left(\delta u_{oA}^{(j+1)} + \frac{h_{j+1}}{2} \delta \beta_A^{(j+1)} \right) - \lambda_A^{(j+1)} \left(\delta u_{oA}^{(j)} - \frac{h_j}{2} \delta \beta_A^{(j)} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(u_{oA}^{(j+1)} + \frac{h_{j+1}}{2} \beta_A^{(j+1)} \right) \delta \lambda_A^{(j+1)} - \left(u_{oA}^{(j)} - \frac{h_j}{2} \beta_A^{(j)} \right) \delta \lambda_A^{(j+1)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \lambda_3^{(j+1)} \delta w^{(j+1)} - \lambda_3^{(j+1)} \delta w^{(j)} + \left(w^{(j+1)} - w^{(j)} \right) \delta \lambda_3^{(j+1)} \right] dS \right\} - \int_{\Omega^{(1)}} q \delta w^{(1)} d\Omega = 0 \quad (3.37) \end{aligned}$$

Como todas las variaciones son arbitrarias,

$$\delta u_{oA}^{(1)} : \quad N_{AB,B}^{(1)} + \lambda_A^{(2)} - \rho_1 h_1 \ddot{u}_{oA}^{(1)} = 0 \quad \text{en } \Omega^{(1)} \quad (3.38)$$

$$\delta w^{(1)} : \quad Q_{A,A}^{(1)} + \lambda_3^{(2)} + q - \rho_1 h_1 \ddot{w}^{(1)} = 0 \quad \text{en } \Omega^{(1)} \quad (3.39)$$

$$\delta \beta_A^{(1)} : \quad Q_A^{(1)} - M_{AB,B}^{(1)} - \frac{h_1}{2} \lambda_A^{(2)} - \rho_1 \frac{h_1^3}{12} \ddot{\beta}_A^{(1)} = 0 \quad \text{en } \Omega^{(1)} \quad (3.40)$$

$$\delta u_{oA}^{(i)} : \quad N_{AB,B}^{(i)} + \lambda_A^{(i+1)} - \lambda_A^{(i)} - \rho_i h_i \ddot{u}_{oA}^{(i)} = 0 \quad \text{en } \Omega^{(i)} \quad i = 2, \dots, n-1 \quad (3.41)$$

$$\delta w^{(i)} : \quad Q_{A,A}^{(i)} + \lambda_3^{(i+1)} - \lambda_3^{(i)} - \rho_i h_i \ddot{w}^{(i)} = 0 \quad \text{en } \Omega^{(i)} \quad i = 2, \dots, n-1 \quad (3.42)$$

$$\delta \beta_A^{(i)} : \quad Q_A^{(i)} - M_{AB,B}^{(i)} - \frac{h_i}{2} \lambda_A^{(i+1)} - \frac{h_i}{2} \lambda_A^{(i)} - \rho_i \frac{h_i^3}{12} \ddot{\beta}_A^{(i)} = 0 \quad \text{en } \Omega^{(i)} \quad i = 2, \dots, n-1 \quad (3.43)$$

$$\delta u_{oA}^{(n)} : \quad N_{AB,B}^{(n)} - \lambda_A^{(n)} - \rho_n h_n \ddot{u}_{oA}^{(n)} = 0 \quad \text{en } \Omega^{(n)} \quad (3.44)$$

$$\delta w^{(n)} : \quad Q_{A,A}^{(n)} - \lambda_3^{(n)} - \rho_n h_n \ddot{w}^{(n)} = 0 \quad \text{en } \Omega^{(n)} \quad (3.45)$$

$$\delta \beta_A^{(n)} : \quad Q_A^{(n)} - M_{AB,B}^{(n)} - \frac{h_n}{2} \lambda_A^{(n)} - \rho_n \frac{h_n^3}{12} \ddot{\beta}_A^{(n)} = 0 \quad \text{en } \Omega^{(n)} \quad (3.46)$$

$$\delta \lambda_A^{(j)} : \quad u_{oA}^{(j)} + \frac{h_j}{2} \beta_A^{(j)} - u_{oA}^{(j-1)} + \frac{h_{j-1}}{2} \beta_A^{(j-1)} = 0 \quad \text{en } S^{(j)} \quad j = 2, \dots, n \quad (3.47)$$

$$\delta \lambda_3^{(j)} : \quad w^{(j)} - w^{(j-1)} = 0 \quad \text{en } S^{(j)} \quad j = 2, \dots, n \quad (3.48)$$

Las ecuaciones (3.38), (3.41) y (3.44) representan la condición de equilibrio de las fuerzas en el plano en cada capa. Las expresiones (3.40), (3.43) y (3.46) representan el equilibrio de momentos en cada capa. Por su parte, (3.39), (3.42) y (3.45) constituyen el equilibrio de las fuerzas transversales al plano en cada capa. Por último, (3.47) y (3.48) representan la restricción impuesta para asegurar la continuidad cinemática.

Se tiene un conjunto de $(8n - 3)$ ecuaciones, de las cuales $(5n)$ son PDE, en $(8n - 3)$ variables $\left[\left(u_{oA}^{(i)}, w^{(i)}, \beta_A^{(i)}, \lambda_A^{(j)}, \lambda_3^{(j)} \right); i = 1, \dots, n; j = 2, \dots, n \right]$ con las siguientes condiciones de borde,

Esenciales	Naturales	
$u_{oB}^{(i)}$	$N_{BA}^{(i)} n_A$	
$w^{(i)}$	$Q_A^{(i)} n_A$	
$\beta_B^{(i)}$	$M_{BA}^{(i)} n_A$	$i = 1, \dots, n$

donde n_A denota el coseno director de la normal unitaria saliente respecto del borde $\bar{\Gamma}$.

Vale destacar que para el caso de una capa única ($n = 1$) se recupera el modelo de la teoría de primer orden,

$$\delta u_{oA}^{(1)} : N_{AB,B}^{(1)} - \rho_1 h_1 \ddot{u}_{oA}^{(1)} = 0 \quad \text{en } \Omega^{(1)} \quad (3.49)$$

$$\delta w^{(1)} : Q_{A,A}^{(1)} + q - \rho_1 h_1 \ddot{w}^{(1)} = 0 \quad \text{en } \Omega^{(1)} \quad (3.50)$$

$$\delta \beta_A^{(1)} : Q_A^{(1)} - M_{AB,B}^{(1)} - \rho_1 \frac{h_1^3}{12} \ddot{\beta}_A^{(1)} = 0 \quad \text{en } \Omega^{(1)} \quad (3.51)$$

3.4 Ecuaciones Constitutivas

La relación tensión-deformación para cada lámina de la placa multicapas está dada por,

$$\begin{aligned} \sigma_{AB} &= C_{ABCD} \varepsilon_{CD} \\ \sigma_{A3} &= C_{A3C3} 2\varepsilon_{C3} \end{aligned} \quad (3.52)$$

donde las cantidades intervinientes están referidas al sistema de coordenadas del problema (ver [Apéndice A](#)). No se incluyen efectos de temperatura, higroscópicos ni piezoeléctricos.

Como la deformación normal transversal ε_{33} es nula por la hipótesis de la normal inextensible, la tensión normal transversal σ_{33} no aparece en la expresión de la energía potencial ni en las ecuaciones de equilibrio, aunque no sea idéntica a cero. De este modo, resulta práctica común despreciar a σ_{33} frente a las tensiones normales en el plano (σ_{11}, σ_{22}) ([Hildebrand et al., 1949](#)), asumiendo en cada capa un estado plano tanto de deformación como de tensión.

Incorporando la expresión (3.52) en la definición de las resultantes de tensiones (3.30)

$$\begin{aligned} N_{AB}^{(i)} &= \int_{-\frac{h_i}{2}}^{+\frac{h_i}{2}} C_{ABCD}^{(i)} \varepsilon_{CD}^{(i)} dz^3 \\ M_{AB}^{(i)} &= \int_{-\frac{h_i}{2}}^{+\frac{h_i}{2}} z^3 C_{ABCD}^{(i)} \varepsilon_{CD}^{(i)} dz^3 \\ Q_A^{(i)} &= \int_{-\frac{h_i}{2}}^{+\frac{h_i}{2}} C_{A3C3}^{(i)} 2\varepsilon_{C3}^{(i)} dz^3 \end{aligned} \quad (3.53)$$

Reescribiendo en términos de los desplazamientos e integrando en el espesor,

$$\begin{aligned} N_{AB}^{(i)} &= h_i C_{ABCD}^{(i)} u_{oC,D}^{(i)} \\ M_{AB}^{(i)} &= -\frac{h_i^3}{12} C_{ABCD}^{(i)} \beta_{C,D}^{(i)} \\ Q_A^{(i)} &= h_i C_{A3C3}^{(i)} (w_{,C}^{(i)} - \beta_C^{(i)}) \end{aligned} \quad (3.54)$$

Así se obtienen las ecuaciones constitutivas que relacionan las fuerzas y momentos resultantes con los desplazamientos (y rotaciones) en cada capa.

3.5 Ecuaciones de Equilibrio en forma irreducible

Las ecuaciones de equilibrio pueden ser expresadas en forma irreducible reemplazando (3.54) en (3.38)-(3.48),

$$\delta u_{oA}^{(1)} : \quad h_1 C_{ABCD}^{(1)} u_{oC,DB}^{(1)} + \lambda_A^{(2)} - \rho_1 h_1 \ddot{u}_{oA}^{(1)} = 0 \quad \text{en } \Omega^{(1)} \quad (3.55)$$

$$\delta w^{(1)} : \quad h_1 C_{A3C3}^{(1)} (w_{,CA}^{(1)} - \beta_{C,A}^{(1)}) + \lambda_3^{(2)} + q - \rho_1 h_1 \ddot{w}^{(1)} = 0 \quad \text{en } \Omega^{(1)} \quad (3.56)$$

$$\delta \beta_A^{(1)} : \quad h_1 C_{A3C3}^{(1)} (w_{,C}^{(1)} - \beta_C^{(1)}) + \frac{h_1^3}{12} C_{ABCD}^{(1)} \beta_{C,DB}^{(1)} + \\ - \frac{h_1}{2} \lambda_A^{(2)} - \rho_1 \frac{h_1^3}{12} \ddot{\beta}_A^{(1)} = 0 \quad \text{en } \Omega^{(1)} \quad (3.57)$$

$$\delta u_{oA}^{(i)} : \quad h_i C_{ABCD}^{(i)} u_{oC,DB}^{(i)} + \lambda_A^{(i+1)} - \lambda_A^{(i)} - \rho_i h_i \ddot{u}_{oA}^{(i)} = 0 \quad \text{en } \Omega^{(i)} \quad (3.58)$$

$$\delta w^{(i)} : \quad h_i C_{A3C3}^{(i)} (w_{,CA}^{(i)} - \beta_{C,A}^{(i)}) + \lambda_3^{(i+1)} - \lambda_3^{(i)} - \rho_i h_i \ddot{w}^{(i)} = 0 \quad \text{en } \Omega^{(i)} \quad (3.59)$$

$$\delta \beta_A^{(i)} : \quad h_i C_{A3C3}^{(i)} (w_{,C}^{(i)} - \beta_C^{(i)}) + \frac{h_i^3}{12} C_{ABCD}^{(i)} \beta_{C,DB}^{(i)} + \\ - \frac{h_i}{2} \lambda_A^{(i+1)} - \frac{h_i}{2} \lambda_A^{(i)} - \rho_i \frac{h_i^3}{12} \ddot{\beta}_A^{(i)} = 0 \quad \text{en } \Omega^{(i)} \quad (3.60)$$

$$i = 2, \dots, n-1$$

$$\delta u_{oA}^{(n)} : \quad h_n C_{ABCD}^{(n)} u_{oC,DB}^{(n)} - \lambda_A^{(n)} - \rho_n h_n \ddot{u}_{oA}^{(n)} = 0 \quad \text{en } \Omega^{(n)} \quad (3.61)$$

$$\delta w^{(n)} : \quad h_n C_{A3C3}^{(n)} (w_{,CA}^{(n)} - \beta_{C,A}^{(n)}) - \lambda_3^{(n)} - \rho_n h_n \ddot{w}^{(n)} = 0 \quad \text{en } \Omega^{(n)} \quad (3.62)$$

$$\delta \beta_A^{(n)} : \quad h_n C_{A3C3}^{(n)} (w_{,C}^{(n)} - \beta_C^{(n)}) + \frac{h_n^3}{12} C_{ABCD}^{(n)} \beta_{C,DB}^{(n)} + \\ - \frac{h_n}{2} \lambda_A^{(n)} - \rho_n \frac{h_n^3}{12} \ddot{\beta}_A^{(n)} = 0 \quad \text{en } \Omega^{(n)} \quad (3.63)$$

$$\delta \lambda_A^{(j)} : \quad u_{oA}^{(j)} + \frac{h_j}{2} \beta_A^{(j)} - u_{oA}^{(j-1)} + \frac{h_{j-1}}{2} \beta_A^{(j-1)} = 0 \quad \text{en } S^{(j)} \quad (3.64)$$

$$\delta \lambda_3^{(j)} : \quad w^{(j)} - w^{(j-1)} = 0 \quad \text{en } S^{(j)} \quad (3.65)$$

$$j = 2, \dots, n$$

El conjunto de ecuaciones (3.55)-(3.63) describe (5n) PDE de segundo orden acopladas a un sistema de (3n - 3) ecuaciones algebraicas (3.64)-(3.65) en términos de (8n - 3) variables cinemáticas (desplazamientos y giros) y estáticas (tensiones transversales interlaminares). El modelo por capas propuesto constituye una teoría de (10n)-ésimo orden con (10n) condiciones de contorno.

4 DISCRETIZACIÓN POR ELEMENTOS FINITOS

4.1 Forma Débil

La forma débil de las $(8n - 3)$ ecuaciones que gobiernan el problema se obtiene multiplicando a las ecuaciones de Euler-Lagrange obtenidas en (3.38)-(3.48) por sus respectivas variaciones e integrando sobre el dominio del elemento Ω_e ,

$$0 = \int_{\Omega_e^{(1)}} \delta u_{oA}^{(1)} \left[N_{AB,B}^{(1)} + \lambda_A^{(2)} - \rho_1 h_1 \ddot{u}_{oA}^{(1)} \right] d\Omega \quad (4.1)$$

$$0 = \int_{\Omega_e^{(1)}} \delta w^{(1)} \left[Q_{A,A}^{(1)} + \lambda_3^{(2)} + q - \rho_1 h_1 \ddot{w}^{(1)} \right] d\Omega \quad (4.2)$$

$$0 = \int_{\Omega_e^{(1)}} \delta \beta_A^{(1)} \left[Q_A^{(1)} - M_{AB,B}^{(1)} - \frac{h_1}{2} \lambda_A^{(2)} - \rho_1 \frac{h_1^3}{12} \ddot{\beta}_A^{(1)} \right] d\Omega \quad (4.3)$$

$$0 = \int_{\Omega_e^{(i)}} \delta u_{oA}^{(i)} \left[N_{AB,B}^{(i)} + \lambda_A^{(i+1)} - \lambda_A^{(i)} - \rho_i h_i \ddot{u}_{oA}^{(i)} \right] d\Omega \quad i = 2, \dots, n-1 \quad (4.4)$$

$$0 = \int_{\Omega_e^{(i)}} \delta w^{(i)} \left[Q_{A,A}^{(i)} + \lambda_3^{(i+1)} - \lambda_3^{(i)} - \rho_i h_i \ddot{w}^{(i)} \right] d\Omega \quad i = 2, \dots, n-1 \quad (4.5)$$

$$0 = \int_{\Omega_e^{(i)}} \delta \beta_A^{(i)} \left[Q_A^{(i)} - M_{AB,B}^{(i)} - \frac{h_i}{2} \lambda_A^{(i+1)} - \frac{h_i}{2} \lambda_A^{(i)} - \rho_i \frac{h_i^3}{12} \ddot{\beta}_A^{(i)} \right] d\Omega \quad i = 2, \dots, n-1 \quad (4.6)$$

$$0 = \int_{\Omega_e^{(n)}} \delta u_{oA}^{(n)} \left[N_{AB,B}^{(n)} - \lambda_A^{(n)} - \rho_n h_n \ddot{u}_{oA}^{(n)} \right] d\Omega \quad (4.7)$$

$$0 = \int_{\Omega_e^{(n)}} \delta w^{(n)} \left[Q_{A,A}^{(n)} - \lambda_3^{(n)} - \rho_n h_n \ddot{w}^{(n)} \right] d\Omega \quad (4.8)$$

$$0 = \int_{\Omega_e^{(n)}} \delta \beta_A^{(n)} \left[Q_A^{(n)} - M_{AB,B}^{(n)} - \frac{h_n}{2} \lambda_A^{(n)} - \rho_n \frac{h_n^3}{12} \ddot{\beta}_A^{(n)} \right] d\Omega \quad (4.9)$$

$$0 = \int_{\Omega_e} \delta \lambda_A^{(j)} \left[u_{oA}^{(j)} + \frac{h_j}{2} \beta_A^{(j)} - u_{oA}^{(j-1)} + \frac{h_{j-1}}{2} \beta_A^{(j-1)} \right] d\Omega \quad j = 2, \dots, n \quad (4.10)$$

$$0 = \int_{\Omega_e} \delta \lambda_3^{(j)} \left[w^{(j)} - w^{(j-1)} \right] d\Omega \quad j = 2, \dots, n \quad (4.11)$$

Es de notar que las variaciones de los desplazamientos y de los multiplicadores de Lagrange toman el rol de funciones de peso en el desarrollo de la forma débil. Integrando por partes,

$$0 = \int_{\Omega_e^{(1)}} \left[\delta u_{oA}^{(1)} N_{AB}^{(1)} - \delta u_{oA}^{(1)} \lambda_A^{(2)} + \delta u_{oA}^{(1)} \rho_1 h_1 \ddot{u}_{oA}^{(1)} \right] d\Omega \quad (4.12)$$

$$0 = \int_{\Omega_e^{(1)}} \left[\delta w \gamma_{A3}^{(1)} Q_A^{(1)} - \delta w^{(1)} \lambda_3^{(2)} - \delta w^{(1)} q + \delta w^{(1)} \rho_1 h_1 \ddot{w}^{(1)} \right] d\Omega \quad (4.13)$$

$$0 = \int_{\Omega_e^{(1)}} \left[\delta \beta \gamma_{A3}^{(1)} Q_A^{(1)} - \delta \beta_{A,B}^{(1)} M_{AB}^{(1)} + \delta \beta_A^{(1)} \frac{h_1}{2} \lambda_A^{(2)} + \delta \beta_A^{(1)} \rho_1 \frac{h_1^3}{12} \ddot{\beta}_A^{(1)} \right] d\Omega \quad (4.14)$$

$$0 = \int_{\Omega_e^{(i)}} \left[\delta u_{oA}^{(i)} N_{AB}^{(i)} - \delta u_{oA}^{(i)} \lambda_A^{(i+1)} + \delta u_{oA}^{(i)} \lambda_A^{(i)} + \delta u_{oA}^{(i)} \rho_i h_i \ddot{u}_{oA}^{(i)} \right] d\Omega \quad (4.15)$$

$$0 = \int_{\Omega_e^{(i)}} [\delta w \gamma_{A3}^{(i)} Q_A^{(i)} - \delta w^{(i)} \lambda_3^{(i+1)} + \delta w^{(i)} \lambda_3^{(i)} + \delta w^{(i)} \rho_i h_i \ddot{w}^{(i)}] d\Omega \quad (4.16)$$

$$0 = \int_{\Omega_e^{(i)}} [\delta \beta \gamma_{A3}^{(i)} Q_A^{(i)} - \delta \beta_{A,B}^{(i)} M_{AB}^{(i)} + \delta \beta_A^{(i)} \frac{h_i}{2} \lambda_A^{(i+1)} + \delta \beta_A^{(i)} \frac{h_i}{2} \lambda_A^{(i)} + \delta \beta_A^{(i)} \rho_i \frac{h_i^3}{12} \ddot{\beta}_A^{(i)}] d\Omega \quad (4.17)$$

$$i = 2, \dots, n-1$$

$$0 = \int_{\Omega_e^{(n)}} [\delta u_{oA,B}^{(n)} N_{AB}^{(n)} + \delta u_{oA}^{(n)} \lambda_A^{(n)} + \delta u_{oA}^{(n)} \rho_n h_n \ddot{u}_{oA}^{(n)}] d\Omega \quad (4.18)$$

$$0 = \int_{\Omega_e^{(n)}} [\delta w \gamma_{A3}^{(n)} Q_A^{(n)} + \delta w^{(n)} \lambda_3^{(n)} + \delta w^{(n)} \rho_n h_n \ddot{w}^{(n)}] d\Omega \quad (4.19)$$

$$0 = \int_{\Omega_e^{(n)}} [\delta \beta \gamma_{A3}^{(n)} Q_A^{(n)} - \delta \beta_{A,B}^{(n)} M_{AB}^{(n)} + \delta \beta_A^{(n)} \frac{h_n}{2} \lambda_A^{(n)} + \delta \beta_A^{(n)} \rho_n \frac{h_n^3}{12} \ddot{\beta}_A^{(n)}] d\Omega \quad (4.20)$$

$$0 = \int_{\Omega_e} [\delta \lambda_A^{(j)} u_{oA}^{(j)} + \delta \lambda_A^{(j)} \frac{h_j}{2} \beta_A^{(j)} - \delta \lambda_A^{(j)} u_{oA}^{(j-1)} + \delta \lambda_A^{(j)} \frac{h_{j-1}}{2} \beta_A^{(j-1)}] d\Omega \quad (4.21)$$

$$0 = \int_{\Omega_e} [\delta \lambda_3^{(j)} w^{(j)} - \delta \lambda_3^{(j)} w^{(j-1)}] d\Omega \quad (4.22)$$

$$j = 2, \dots, n$$

donde se introduce la notación $\delta_{(\cdot)}(*)$ para indicar la variación de $(*)$ respecto de (\cdot) . Las condiciones de contorno de fuerza o tipo Neumann son consideradas nulas a partir de la asunción de perímetro empotrado. Es decir,

$$N_{BA}^{(i)} n_A = 0 \quad \text{en } \bar{\Gamma}_i \quad (4.23)$$

$$M_{BA}^{(i)} n_A = 0 \quad \text{en } \bar{\Gamma}_i \quad (4.24)$$

$$Q_A^{(i)} n_A = 0 \quad \text{en } \bar{\Gamma}_i \quad (4.25)$$

4.2 Modelo de Elementos Finitos

La forma débil del modelo presenta derivadas primeras de las variables cinemáticas, requiriendo continuidad C^0 en el plano (*i.e.*, resulta necesario forzar la continuidad entre elementos sólo de $[[u_{oA}^{(i)}, w^{(i)}, \beta_A^{(i)}], i = 1, \dots, n]$, pero no de sus derivadas). Mientras que las variables estáticas pueden ser discontinuas al no aparecer sus derivadas (Continuidad C^{-1}).

Usando elementos finitos isoparamétricos ([Bathe, 1996](#); [Reddy, 2006](#)),

$$u_{oA}^{(i)} = \sum_{k=1}^{NN} N_k \hat{u}_{oA}^k{}^{(i)} \quad (4.26)$$

$$w^{(i)} = \sum_{k=1}^{NN} N_k \hat{w}^k{}^{(i)} \quad (4.27)$$

$$\beta_A^{(i)} = \sum_{k=1}^{NN} N_k \hat{\beta}_A^k{}^{(i)} \quad i = 1, \dots, n \quad (4.28)$$

$$\lambda_A^{(j)} = \sum_{k=1}^{NN} N_k \hat{\lambda}_A^k{}^{(j)} \quad (4.29)$$

$$\lambda_3^{(j)} = \sum_{k=1}^{NN} N_k \hat{\lambda}_3^k{}^{(j)} \quad j = 2, \dots, n \quad (4.30)$$

$$z^A = \sum_{k=1}^{NN} N_k \hat{z}_k^A \quad (4.31)$$

donde $N_k(r, s)$ son las funciones de forma asociadas al nodo k y NN el número de nodos del elemento. La tilde circunfleja ($\hat{\cdot}$) indica variable nodal.

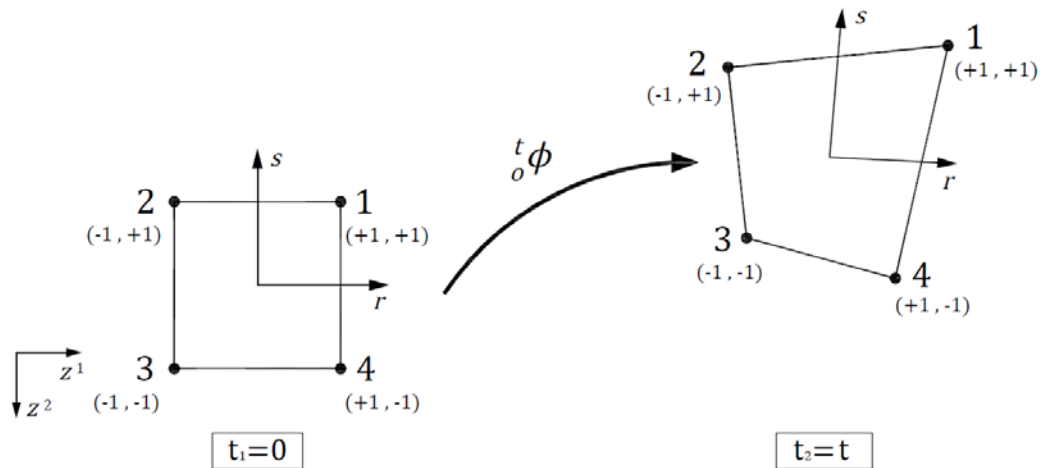


Figura 4.1: Elemento cuadrilátero bi-lineal.

Cada función de forma $N_k(r, s)$ es definida de manera tal que su valor es unitario en el nodo k , y cero en los demás nodos, siendo $\{(r, s) \in [-1; +1]\}$ el sistema de coordenadas convectivo (natural) del elemento. De este modo, para el elemento de 4 nodos de la Figura 4.1, se tienen las siguientes funciones de forma,

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4} (1 + r) (1 + s) & N_3 &= \frac{1}{4} (1 - r) (1 - s) \\ N_2 &= \frac{1}{4} (1 - r) (1 + s) & N_4 &= \frac{1}{4} (1 + r) (1 - s) \end{aligned} \quad (4.32)$$

Las matrices del modelo de elementos finitos son calculadas mediante integración numérica, en particular la cuadratura de Gauss resulta la técnica más atractiva entre las disponibles en la literatura (Zienkiewicz & Taylor, 1994; Bathe, 1996). Si el número de puntos de Gauss empleado es el suficiente como para tener una evaluación exacta de las integrales, se denomina *completa*. Mientras que si se emplean menos puntos, la integración es *reducida*.

En ese sentido, un aspecto importante del empleo de la interpolación (4.32) es que asumiendo integración numérica completa, este elemento bloquea (“locks”) cuando su relación espesor/lado es baja. Dicho problema, conocido como bloque por corte (“shear locking”), es debido a que con la interpolación utilizada, la deformación transversal por corte no puede ser nula en todos los puntos del elemento cuando éste es sometido a un momento flector constante (ver Apéndice B). Esto conlleva a elementos artificialmente rígidos conforme la relación espesor/lado disminuye, siendo más pronunciado en elementos distorsionados. De este modo, las hipótesis de Kirchhoff no pueden ser simuladas numéricamente por este elemento cuando se analizan placas o cáscaras delgadas. Una solución simple consiste en el empleo de integración reducida o *selectiva* (i.e., integrar en menos puntos solamente los términos referidos al corte), aunque ambas técnicas incorporan modos espurios de cuerpo rígido (i.e., con energía nula) adicionales a los 5 modos de cuerpo rígido siempre presentes en estos elementos (Dvorkin, 1984).

Una solución más confiable y eficiente, con buenos resultados numéricos tanto en el campo lineal como no lineal, ha sido presentada por Dvorkin & Bathe (1984). Siguiendo este enfoque, las deformaciones membranales y de flexión son interpoladas de manera diferente respecto de los efectos por corte transversal. Para evaluar los primeros, se emplea la interpolación (4.32), tal como se realiza usualmente, para lo cual es necesario realizar las siguientes derivadas,

$$u_{oA,B}^{(i)} = \sum_{k=1}^{NN} N_{k,B} \hat{u}_{oA}^{k(i)} \quad (4.33)$$

$$\beta_{A,B}^{(i)} = \sum_{k=1}^{NN} N_{k,B} \hat{\beta}_A^{k(i)} \quad i = 1, \dots, n \quad (4.34)$$

Aplicando la Regla de la Cadena, se escribe,

$$\begin{bmatrix} N_{k,r} \\ N_{k,s} \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{J}} \cdot \begin{bmatrix} N_{k,1} \\ N_{k,2} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

donde es introducida la matriz Jacobiana $\underline{\mathbf{J}}$,

$$\underline{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z^1_{,r} & z^2_{,r} \\ z^1_{,s} & z^2_{,s} \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Invirtiendo el Jacobiano de la transformación, se obtiene,

$$\begin{bmatrix} N_{k,1} \\ N_{k,2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(\underline{\mathbf{J}})} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{21} \\ -J_{12} & J_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_{k,r} \\ N_{k,s} \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

siendo el determinante del Jacobiano,

$$\det(\underline{\mathbf{J}}) = J_{22} J_{11} - J_{12} J_{21} \quad (4.38)$$

Por otra parte, para calcular la deformación por corte transversal de cada capa, se interpolan las componentes covariantes del tensor de deformaciones infinitesimales medidas en el sistema de coordenadas convectivo del elemento como se muestra en el [Apéndice C](#), obteniéndose las siguientes expresiones,

$$\begin{aligned} \gamma_{13} = & \frac{C_2+r B_2}{8 \det(\underline{\mathbf{J}})} \left\{ (1+s) \left[\frac{\hat{w}^1-\hat{w}^2}{2} - \frac{\hat{z}_1^1-\hat{z}_2^1}{4} (\hat{\beta}_1^1 + \hat{\beta}_1^2) - \frac{\hat{z}_1^2-\hat{z}_2^2}{4} (\hat{\beta}_2^1 + \hat{\beta}_2^2) \right] + \right. \\ & \left. + (1-s) \left[\frac{\hat{w}^4-\hat{w}^3}{2} - \frac{\hat{z}_4^1-\hat{z}_3^1}{4} (\hat{\beta}_1^4 + \hat{\beta}_1^3) - \frac{\hat{z}_4^2-\hat{z}_3^2}{4} (\hat{\beta}_2^4 + \hat{\beta}_2^3) \right] \right\} + \\ & - \frac{A_2+s B_2}{8 \det(\underline{\mathbf{J}})} \left\{ (1+r) \left[\frac{\hat{w}^1-\hat{w}^4}{2} - \frac{\hat{z}_1^1-\hat{z}_4^1}{4} (\hat{\beta}_1^1 + \hat{\beta}_1^4) - \frac{\hat{z}_1^2-\hat{z}_4^2}{4} (\hat{\beta}_2^1 + \hat{\beta}_2^4) \right] + \right. \\ & \left. + (1-r) \left[\frac{\hat{w}^2-\hat{w}^3}{2} - \frac{\hat{z}_2^1-\hat{z}_3^1}{4} (\hat{\beta}_1^2 + \hat{\beta}_1^3) - \frac{\hat{z}_2^2-\hat{z}_3^2}{4} (\hat{\beta}_2^2 + \hat{\beta}_2^3) \right] \right\} \quad (4.39) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{23} = & - \frac{C_1+r B_1}{8 \det(\underline{\mathbf{J}})} \left\{ (1+s) \left[\frac{\hat{w}^1-\hat{w}^2}{2} - \frac{\hat{z}_1^1-\hat{z}_2^1}{4} (\hat{\beta}_1^1 + \hat{\beta}_1^2) - \frac{\hat{z}_1^2-\hat{z}_2^2}{4} (\hat{\beta}_2^1 + \hat{\beta}_2^2) \right] + \right. \\ & \left. + (1-s) \left[\frac{\hat{w}^4-\hat{w}^3}{2} - \frac{\hat{z}_4^1-\hat{z}_3^1}{4} (\hat{\beta}_1^4 + \hat{\beta}_1^3) - \frac{\hat{z}_4^2-\hat{z}_3^2}{4} (\hat{\beta}_2^4 + \hat{\beta}_2^3) \right] \right\} + \\ & + \frac{A_1+s B_1}{8 \det(\underline{\mathbf{J}})} \left\{ (1+r) \left[\frac{\hat{w}^1-\hat{w}^4}{2} - \frac{\hat{z}_1^1-\hat{z}_4^1}{4} (\hat{\beta}_1^1 + \hat{\beta}_1^4) - \frac{\hat{z}_1^2-\hat{z}_4^2}{4} (\hat{\beta}_2^1 + \hat{\beta}_2^4) \right] + \right. \\ & \left. + (1-r) \left[\frac{\hat{w}^2-\hat{w}^3}{2} - \frac{\hat{z}_2^1-\hat{z}_3^1}{4} (\hat{\beta}_1^2 + \hat{\beta}_1^3) - \frac{\hat{z}_2^2-\hat{z}_3^2}{4} (\hat{\beta}_2^2 + \hat{\beta}_2^3) \right] \right\} \quad (4.40) \end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned} A_1 &= \hat{z}_1^1 - \hat{z}_2^1 - \hat{z}_3^1 + \hat{z}_4^1 \\ B_1 &= \hat{z}_1^1 - \hat{z}_2^1 + \hat{z}_3^1 - \hat{z}_4^1 \\ C_1 &= \hat{z}_1^1 + \hat{z}_2^1 - \hat{z}_3^1 - \hat{z}_4^1 \\ A_2 &= \hat{z}_1^2 - \hat{z}_2^2 - \hat{z}_3^2 + \hat{z}_4^2 \\ B_2 &= \hat{z}_1^2 - \hat{z}_2^2 + \hat{z}_3^2 - \hat{z}_4^2 \\ C_2 &= \hat{z}_1^2 + \hat{z}_2^2 - \hat{z}_3^2 - \hat{z}_4^2 \end{aligned} \quad (4.41)$$

donde $\hat{\mathbf{x}}_i = [\hat{\mathbf{u}}_o^{(i)}, \hat{\mathbf{w}}^{(i)}, \hat{\mathbf{p}}^{(i)}]^T$ son las variables cinemáticas de la capa i , $\hat{\lambda}_j = [\hat{\lambda}^{(j)}, \hat{\lambda}_3^{(j)}]^T$ son las variables estáticas referidas a la interfaz j , $(\underline{\mathbf{C}}_{ii}, \underline{\mathbf{M}}_{ii})$ son las contribuciones de rigidez y masa de cada capa, respectivamente, y $(\underline{\mathbf{Q}}_{ii}, \underline{\mathbf{Q}}_{ij})$ son las matrices resultantes del problema de restricción Lagrangeana. El arreglo $\underline{\mathbf{F}}_1$ representa las cargas nodales equivalentes aplicadas en la primera capa.

4.3 Análisis lineal estático

En el estudio de flexión estática geoméricamente lineal, el conjunto de ecuaciones (4.53) se reduce a la forma,

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{C}}_{11} & \underline{\mathbf{Q}}_{12}^T & & & \\ \underline{\mathbf{Q}}_{12} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{Q}}_{22}^T & \underline{\mathbf{0}} & \\ & \underline{\mathbf{Q}}_{22} & \underline{\mathbf{C}}_{22} & \underline{\mathbf{Q}}_{23}^T & \\ & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{Q}}_{23} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{Q}}_{33}^T \\ & & & \underline{\mathbf{Q}}_{33} & \underline{\mathbf{C}}_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 \\ \hat{\lambda}_2 \\ \hat{\mathbf{x}}_2 \\ \hat{\lambda}_3 \\ \hat{\mathbf{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{F}}_1 \\ \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}} \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

Como es característico de las formulaciones mixtas, la matriz de rigidez generada no es definida positiva. Además, el número de incógnitas aumenta rápidamente conforme se agregan más capas al modelo, por lo que la resolución del sistema de ecuaciones resulta difícil y costosa desde el punto de vista computacional. Se presenta a continuación una sencilla metodología para remediar este inconveniente, a partir de la condensación de las variables cinemáticas.

De la expresión (4.54), se plantea,

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{C}}_{11} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1 + \underline{\mathbf{Q}}_{12}^T \cdot \hat{\lambda}_2 &= \underline{\mathbf{F}}_1 & \underline{\mathbf{C}}_{11} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1 &= \underline{\mathbf{F}}_1 - \underline{\mathbf{Q}}_{12}^T \cdot \hat{\lambda}_2 \\ \underline{\mathbf{Q}}_{22} \cdot \hat{\lambda}_2 + \underline{\mathbf{C}}_{22} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2 + \underline{\mathbf{Q}}_{23}^T \cdot \hat{\lambda}_3 &= \underline{\mathbf{0}} & \Rightarrow \underline{\mathbf{C}}_{22} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2 &= -\underline{\mathbf{Q}}_{22} \cdot \hat{\lambda}_2 - \underline{\mathbf{Q}}_{23}^T \cdot \hat{\lambda}_3 \\ \underline{\mathbf{Q}}_{33} \cdot \hat{\lambda}_3 + \underline{\mathbf{C}}_{33} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3 &= \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{C}}_{33} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3 &= -\underline{\mathbf{Q}}_{33} \cdot \hat{\lambda}_3 \end{aligned} \quad (4.55)$$

Reemplazando los desplazamientos (y rotaciones) en las ecuaciones restantes, se alcanza la matriz de rigidez reducida,

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{Q}}_{12} \cdot \underline{\mathbf{C}}_{11}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{Q}}_{12}^T + \underline{\mathbf{Q}}_{22}^T \cdot \underline{\mathbf{C}}_{22}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{Q}}_{22} & \underline{\mathbf{Q}}_{22}^T \cdot \underline{\mathbf{C}}_{22}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{Q}}_{23}^T \\ \underline{\mathbf{Q}}_{23} \cdot \underline{\mathbf{C}}_{22}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{Q}}_{22} & \underline{\mathbf{Q}}_{23} \cdot \underline{\mathbf{C}}_{22}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{Q}}_{23}^T + \underline{\mathbf{Q}}_{33}^T \cdot \underline{\mathbf{C}}_{33}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{Q}}_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_2 \\ \hat{\lambda}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{Q}}_{12} \cdot \underline{\mathbf{C}}_{11}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{F}}_1 \\ \underline{\mathbf{0}} \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

Así, una vez determinados los multiplicadores de Lagrange, se obtienen las variables cinemáticas. Esto representa un aspecto muy fuerte del modelo dado que permite obtener las tensiones transversales interlaminares sin necesidad de resolver el sistema completo.

La condición de estabilidad necesaria pero no suficiente para resolver el conjunto de ecuaciones (4.56) resulta,

$$n_x \geq n_\lambda \quad (4.57)$$

donde n_x y n_λ son el número total de grados de libertad de las variables cinemáticas y estáticas, respectivamente (Zienkiewicz & Taylor, 1994).

gran cantidad de procedimientos numéricos se han desarrollado para problemas de autovalores en mecánica estructural (ver *Bathe & Wilson, 1972, 1973; Chopra, 1995; Bathe, 1996*), no obstante, en la mayoría de los casos se requiere que las matrices de rigidez y masa sean definidas positivas. A los efectos, se propone en este trabajo una metodología simple de resolución del problema en base al Método de Iteración Inversa (*"Inverse Vector Iteration Method"*).

El procedimiento consiste en establecer inicialmente un vector de prueba. Posteriormente, se evalúa el lado derecho de (4.60). Dado que los vectores propios sólo pueden ser determinados dentro de un factor de escala, la elección de ω^2 no afecta el resultado, por lo cual se asume $\omega^2 = 1$. De esta forma, se obtiene el vector de cargas equivalentes de la iteración m expuesto en la expresión (4.62).

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{M}}_{11} & \underline{\mathbf{0}} & & & \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \\ & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{M}}_{22} & \underline{\mathbf{0}} & \\ & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} \\ & & & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{M}}_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\underline{\mathbf{x}}}_{1,m}^{\circ} \\ \hat{\lambda}_{2,m} \\ \hat{\underline{\mathbf{x}}}_{2,m}^{\circ} \\ \hat{\lambda}_{3,m} \\ \hat{\underline{\mathbf{x}}}_{3,m}^{\circ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{M}}_{11} \cdot \hat{\underline{\mathbf{x}}}_{1,m}^{\circ} \\ \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{M}}_{22} \cdot \hat{\underline{\mathbf{x}}}_{2,m}^{\circ} \\ \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{M}}_{33} \cdot \hat{\underline{\mathbf{x}}}_{3,m}^{\circ} \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

donde es importante destacar que la coma no indica diferenciación en este caso.

Como el vector inicial se establece arbitrariamente, en general no se cumple la igualdad representada en (4.62) (si se satisface, el vector de prueba es un autovector), por lo que se debe resolver el conjunto de ecuaciones (4.63).

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{C}}_{11} & \underline{\mathbf{Q}}_{12}^T & & & \\ \underline{\mathbf{Q}}_{12} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{Q}}_{22}^T & \underline{\mathbf{0}} & \\ & \underline{\mathbf{Q}}_{22} & \underline{\mathbf{C}}_{22} & \underline{\mathbf{Q}}_{23}^T & \\ & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{Q}}_{23} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{Q}}_{33}^T \\ & & & \underline{\mathbf{Q}}_{33} & \underline{\mathbf{C}}_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\underline{\mathbf{x}}}_{1,m+1}^{\circ} \\ \hat{\lambda}_{2,m+1} \\ \hat{\underline{\mathbf{x}}}_{2,m+1}^{\circ} \\ \hat{\lambda}_{3,m+1} \\ \hat{\underline{\mathbf{x}}}_{3,m+1}^{\circ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{M}}_{11} \cdot \hat{\underline{\mathbf{x}}}_{1,m}^{\circ} \\ \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{M}}_{22} \cdot \hat{\underline{\mathbf{x}}}_{2,m}^{\circ} \\ \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{M}}_{33} \cdot \hat{\underline{\mathbf{x}}}_{3,m}^{\circ} \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

La solución de este sistema se halla procediendo de igual manera que en el problema estático.

Posteriormente, el correspondiente autovalor se computa aplicando el Cociente de Rayleigh,

$$(\omega^2)_{m+1} = \sum_{i=1}^n \frac{\hat{\underline{\mathbf{x}}}_{i, m+1}^{\circ T} \cdot \underline{\mathbf{M}}_{ii} \cdot \hat{\underline{\mathbf{x}}}_{i, m}^{\circ}}{\hat{\underline{\mathbf{x}}}_{i, m+1}^{\circ T} \cdot \underline{\mathbf{M}}_{ii} \cdot \hat{\underline{\mathbf{x}}}_{i, m+1}^{\circ}} \quad (4.64)$$

Al ser definidas positivas las sub-matrices de masa $\underline{\mathbf{M}}_{ii}$ asociadas a cada una de las capas, se garantiza que el divisor de la expresión (4.64) no sea nulo, así como también que el resultado obtenido sea mayor a cero.

Luego, se normaliza el vector resultante de manera que el nuevo vector cumpla,

$$\sum_{i=1}^n \hat{\underline{\mathbf{x}}}_{i, m+1}^{\circ T} \cdot \underline{\mathbf{M}}_{ii} \cdot \hat{\underline{\mathbf{x}}}_{i, m+1}^{\circ} = 1 \quad (4.65)$$

Esta normalización mantiene los elementos del vector con valores similares durante cada iteración. Si no se lleva a cabo, los valores de los elementos crecen y decrecen en cada paso, pudiendo ocasionar problemas numéricos.

La comprobación de la convergencia se especifica comparando dos valores sucesivos del autovalor,

$$\epsilon_r = \left\| \frac{(\omega^2)_{m+1} - (\omega^2)_m}{(\omega^2)_{m+1}} \right\| \leq tol \quad (4.66)$$

donde $\| \cdot \|$ representa el valor absoluto. Si el criterio de convergencia no se satisface, se comienza una nueva iteración utilizando como vector de prueba aquel obtenido al resolver el sistema (4.63). El procedimiento se repite hasta alcanzar la convergencia establecida. A medida que se incrementa el número de iteraciones, se tiende al autovalor y autovector más bajo.

La evaluación de los modos y frecuencias superiores se puede realizar introduciendo un desplazamiento (“*shifting*”) en la escala de autovalores, o estableciendo, mediante la técnica de Grand-Schmidt, un vector de prueba inicial ortogonal a los autovectores hallados.

5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Se implementa un código en el *software* GNU Octave v3.6.1 ([Eaton et. al., 2011](#)) para el análisis numérico de problemas de flexión estática geoméricamente lineal y vibraciones libres no amortiguadas de placas compuestas, en base al modelo presentado. Se realizan una serie de ejemplos que son contrastados con la solución de la Elasticidad 3D disponible.

Las placas analizadas presentan una geometría rectangular con dimensiones a, b coincidentes con las direcciones (z^1, z^2) , respectivamente, y sus cuatro bordes se encuentran simplemente apoyados. Se modela por razones de simetría, tanto para el caso estático lineal como para el modo fundamental de vibración, sólo un cuarto de la placa con una malla uniforme de 6x6 elementos MITC4 (ver [Figura 5.1](#)), salvo otra indicación. La evaluación numérica de las integrales se lleva a cabo a partir del método de cuadratura de Gauss, empleándose 2x2 puntos para todos los términos (*i.e.*, integración completa), con excepción del ejemplo donde se estudia el bloqueo por corte.

Las condiciones de borde empleadas, son:

$$\begin{aligned}
 (z^1, 0): & \quad w^{(i)} = u_{o1}^{(i)} = \beta_1^{(i)} = 0 \\
 (0, z^2): & \quad w^{(i)} = u_{o2}^{(i)} = \beta_2^{(i)} = 0 \\
 (z^1, b/2): & \quad u_{o2}^{(i)} = \beta_2^{(i)} = 0 \\
 (a/2, z^2): & \quad u_{o1}^{(i)} = \beta_1^{(i)} = 0
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Los resultados se presentan adimensionalizados de acuerdo a lo siguiente,

$$\begin{aligned}
 \bar{w} &= \left(\frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_T}} \right) \omega & ; & \quad \bar{w} = \left(\frac{100 E_T h^3}{q_o a^4} \right) w \\
 \bar{u}_1 &= \left(\frac{100 E_T h^2}{q_o a^3} \right) u_1 & ; & \quad \bar{u}_2 = \left(\frac{100 E_T h^2}{q_o a^3} \right) u_2 \\
 \bar{\sigma}_{11} &= \left(\frac{h^2}{q_o a^2} \right) \sigma_{11} & ; & \quad \bar{\sigma}_{22} = \left(\frac{h^2}{q_o a^2} \right) \sigma_{22} \\
 \bar{\sigma}_{33} &= \left(\frac{1}{q_o} \right) \sigma_{33} & ; & \quad \bar{\sigma}_{12} = \left(\frac{h^2}{q_o a^2} \right) \sigma_{12} \\
 \bar{\sigma}_{13} &= \left(\frac{h}{q_o a} \right) \sigma_{13} & ; & \quad \bar{\sigma}_{23} = \left(\frac{h}{q_o a} \right) \sigma_{23}
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Las ubicaciones para la evaluación de los desplazamientos y tensiones tabulados, a menos que se especifiquen otras, son las siguientes,

Desplazamiento transversal al plano \bar{w} :	(0.50a ; 0.50b)
Tensión normal en el plano $\bar{\sigma}_{11}$:	(0.50a ; 0.50b ; 0.50h)
Tensión normal en el plano $\bar{\sigma}_{22}$:	(0.50a ; 0.50b ; interfaz inf.)
Tensión de corte en el plano $\bar{\sigma}_{12}$:	(0.00 ; 0.00 ; 0.50h)
Tensión de corte transversal al plano $\bar{\sigma}_{13}$:	(0.00 ; 0.50b ; 0.00)
Tensión de corte transversal al plano $\bar{\sigma}_{23}$:	(0.50a ; 0.00 ; 0.00)

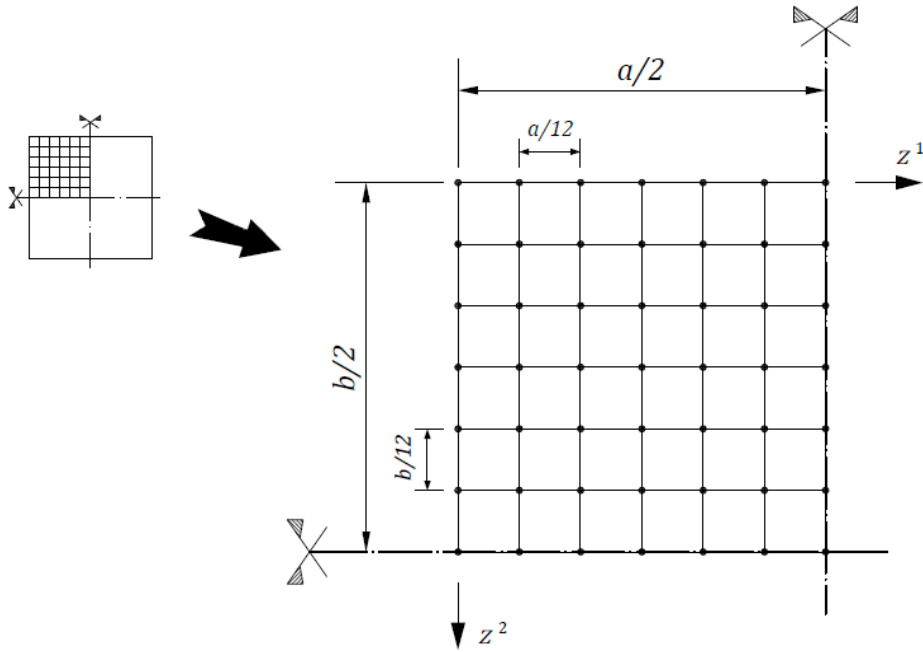


Figura 5.1: Malla uniforme de 6x6 elementos en un cuarto de placa.

Las tensiones son calculadas en el punto de Gauss más cercano a la posición indicada, salvo las obtenidas a través de los multiplicadores de Lagrange (designadas con el superíndice “L”), que pertenecen a los nodos.

En el análisis de vibraciones libres, la tolerancia empleada para la resolución del problema de autovalores mediante el Método de Iteración Inversa fue establecida en $1e-6$.

5.1 Análisis de convergencia. Efectos de la relación espesor/lado.

Este problema se focaliza en la convergencia del modelo de elementos finitos, no sólo al refinar la malla en el plano, sino también la discretización del espesor. El objetivo es verificar tanto el modelo matemático formulado como su implementación numérica, al analizar si los resultados tienden a la solución exacta de la Elasticidad ([Pagano, 1970](#)) conforme se incrementa el número de grados de libertad numéricos. Además, se estudian el fenómeno numérico de bloqueo por corte y el efecto de la distorsión en la malla.

Se considera una placa laminada rectangular ($b = 3a$) simplemente apoyada con una secuencia de laminado ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) (“*Three Layers Symmetric Cross Ply*”), bajo una carga con distribución bi-armónica,

$$q(z^1, z^2) = q_o \sin\left(\frac{\pi z^1}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi z^2}{b}\right) \quad (5.3)$$

siendo q_o la amplitud de la carga sinusoidal.

Las propiedades del material de las láminas son,

$$\begin{aligned} \frac{E_L}{E_T} &= 25 & \nu_{LT} &= 0.25 \\ \frac{G_{LT}}{E_T} &= 0.50 & \frac{G_{TT}}{E_T} &= 0.20 \end{aligned} \quad (5.4)$$

donde los valores de E_T y ρ resultan arbitrarios debido a la adimensionalización (5.2). Las relaciones dadas en (5.4) son típicas del material compuesto *grafito-epoxi*. Los subíndices L, T refieren a las direcciones paralela y transversal a la fibra, respectivamente, tal como se detalla en el [Apéndice A](#).

Los resultados se muestran en la [Tabla 5.1](#), los gráficos de convergencia, en la [Figura 5.2](#).

Referencia	Malla	Capas de cálculo	Relación h/a					
			0.50	0.25	0.10	0.05	0.02	0.01
Actual	2x2	3 layers	8.2994	2.8081	0.8937	0.5831	0.4937	0.4809
		6 layers	8.4141	2.8697	0.9088	0.5872	0.4944	0.4811
		9 layers	8.5704	2.8944	0.9120	0.5880	0.4945	0.4811
		12 layers	8.6368	2.9041	0.9132	0.5883	0.4946	0.4811
	4x4	3 layers	8.1034	2.7578	0.8989	0.5994	0.5134	0.5010
		6 layers	8.2195	2.8191	0.9135	0.6033	0.5140	0.5012
		9 layers	8.3666	2.8423	0.9167	0.6041	0.5142	0.5012
		12 layers	8.4289	2.8514	0.9178	0.6044	0.5142	0.5012
	6x6	3 layers	8.0673	2.7485	0.8998	0.6023	0.5169	0.5046
		6 layers	8.1837	2.8096	0.9143	0.6062	0.5175	0.5048
		9 layers	8.3292	2.8326	0.9174	0.6070	0.5177	0.5048
		12 layers	8.3907	2.8416	0.9186	0.6073	0.5177	0.5048
Pagano(1970)	-	-	8.17	2.82	0.919	0.610	0.520	0.508

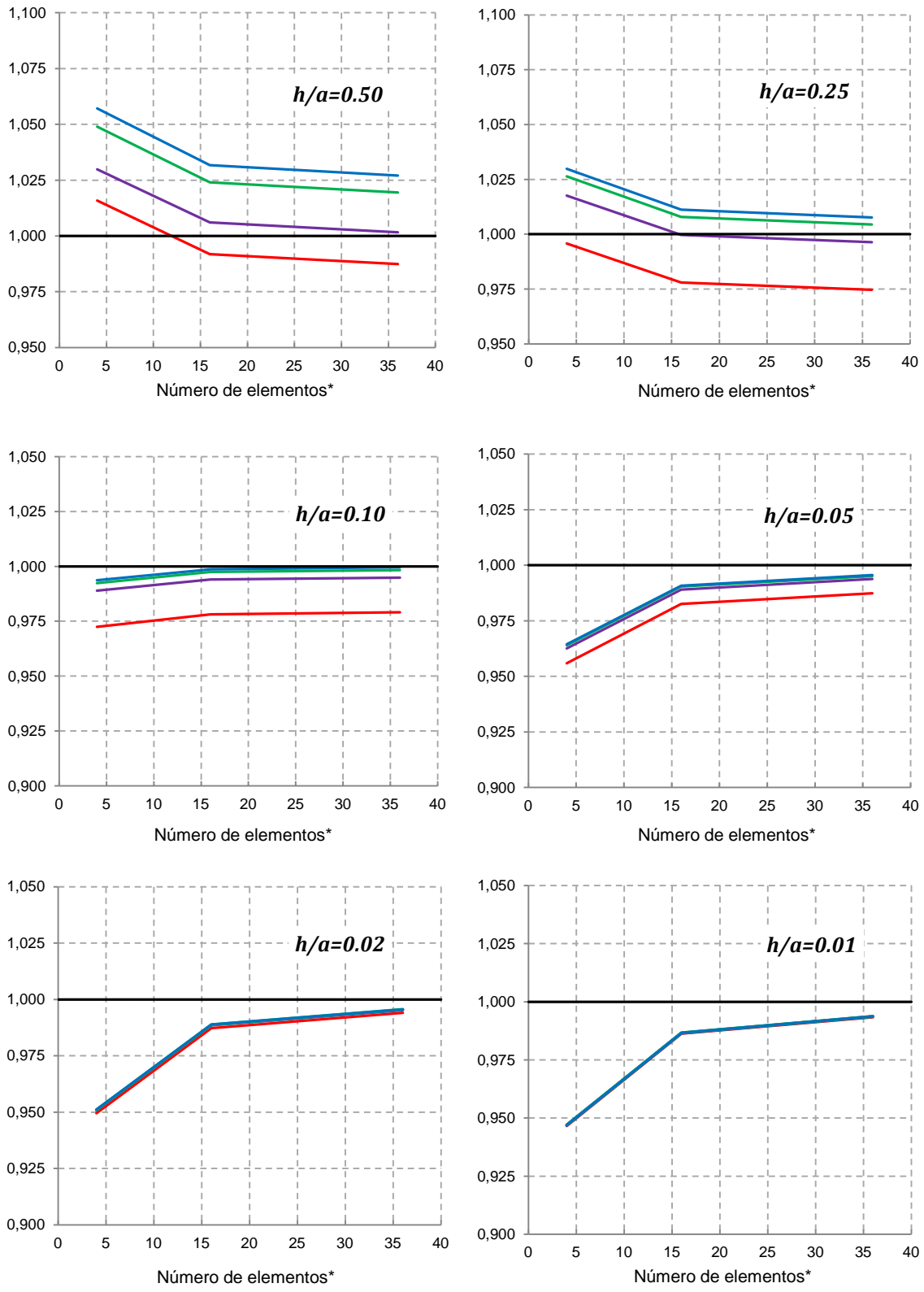
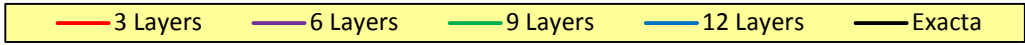
Tabla 5.1: Deflexión central de una placa rectangular ($b=3a$) simplemente apoyada con un esquema ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) bajo una carga sinusoidal.

Se observa que al refinar la malla, los resultados convergen a la solución de la Elasticidad, incluso para placas muy delgadas no produciéndose bloqueo. Para placas gruesas, la precisión del modelo disminuye levemente, debido a la hipótesis de la normal transversal indeformable, la que no es estrictamente cierta para altas relaciones espesor/lado. Al mismo tiempo, se nota que la discretización del espesor tiene más peso en las placas de moderada y, principalmente, gran altura. Esto se debe a que para tales casos, el efecto de la deformación por corte es importante y debe ser inevitablemente tenido en cuenta. En ese sentido, al aumentar las capas de cálculo en el espesor, se obtiene una representación más precisa de la energía de deformación por corte, asumida constante en cada capa. Por el contrario, para bajas relaciones espesor/lado, este efecto pierde relevancia, no siendo necesaria una discretización del espesor fina.

A los efectos de estudiar el problema de bloqueo, se contrasta el comportamiento del elemento MITC4 respecto de la formulación isoparamétrica tradicional (denominada QUAD4), para la cual diferentes estrategias de integración numérica son empleadas (ver [Tabla 5.2](#)). La placa analizada presenta un esquema de laminado ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) y su relación de lados se establece en $a/b = 1$, el resto de las características del problema coinciden con las analizadas más arriba. El espesor se discretiza en 8 capas iguales de cálculo.

Tipo de integración	Puntos de Integración de Gauss		
	Membranal	Flexión	Corte
Completa	2x2	2x2	2x2
Selectiva	2x2	2x2	1x1
Reducida	1x1	1x1	1x1

Tabla 5.2: Esquemas de integración numérica mediante cuadratura de Gauss.



* En un cuarto de placa.

Figura 5.2: Convergencia del modelo para varias relaciones espesor/lado. Eje de ordenadas: $\bar{w}_{ACTUAL}/\bar{w}_{EXACTA}$.

Los resultados son presentados en la [Tabla 5.3](#), donde las designaciones “F”, “S”, “R” refieren al tipo de integración (completa, selectiva y reducida, respectivamente). En la [Figura 5.3](#) se muestra la variación del desplazamiento vertical máximo para las distintas relaciones espesor/lado, en donde el eje de ordenadas se encuentra en escala logarítmica. Se demuestra como el elemento QUAD4, a diferencia del MITC4, bloquea al asumir integración completa, subestimando la deflexión a medida que la relación h/a disminuye. Al emplear integración reducida o selectiva, la respuesta del elemento QUAD4 no presenta *locking*. No obstante, este enfoque práctico origina una deficiencia en el rango de la matriz de rigidez que puede dar lugar a modos espurios de energía, tal como se comentó previamente, lo que baja la confianza de los resultados numéricos.

Referencia	Elemento	Relación h/a					
		0.50	0.25	0.10	0.05	0.02	0.01
Actual	MITC4	5.3058	1.9523	0.7360	0.5109	0.4423	0.4323
	QUAD4-F	5.2984	1.9433	0.7217	0.4774	0.3104	0.1604
	QUAD4-S	5.3298	1.9596	0.7376	0.5114	0.4424	0.4323
	QUAD4-R	5.3364	1.9634	0.7401	0.5137	0.4447	0.4346
Pagano(1972)	-	5.0745	1.9367	0.7370	0.5128	0.4446	0.4347

Tabla 5.3: Performances de los elementos MITC4 y QUAD4 para distintas relaciones espesor/lado.

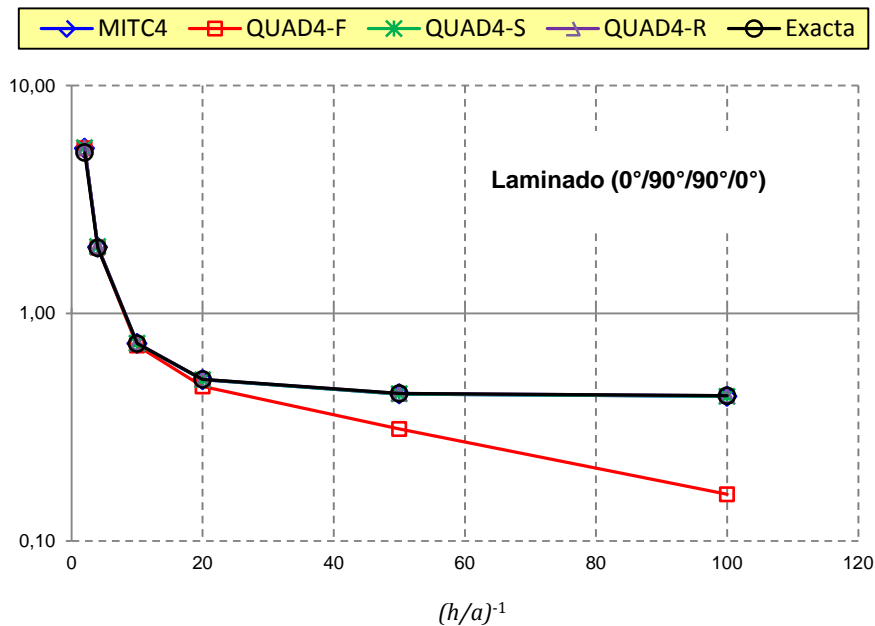


Figura 5.3: Variación de la deflexión máxima según la relación espesor/lado. Laminado cuadrado ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) simplemente apoyado bajo carga sinusoidal. Eje de ordenadas: $\log_{10}[\bar{w}]$.

Muchos de los problemas reales de ingeniería presentan geometrías complejas en las cuales resulta inevitable la presencia de elementos distorsionados (Jacobiano no constante). Partiendo del ejemplo previo, se estudia la influencia de la distorsión de la malla. Los elementos distorsionados son generados a partir de nodos definidos mediante la siguiente expresión,

$$\begin{aligned} \hat{z}^1 &= \hat{z}^1 + r_c s \Delta z^1 \\ \hat{z}^2 &= \hat{z}^2 + r_c s \Delta z^2 \end{aligned} \quad (5.5)$$

en donde r_c es un número aleatorio entre $[-1.0; +1.0]$, $(\Delta z^1, \Delta z^2)$ son los tamaños de los elementos de la malla regular en las direcciones (z^1, z^2) , respectivamente, y $s \in [0.00; 0.40]$ es un parámetro usado para controlar el grado de distorsión. La tilde breve ($\tilde{\cdot}$) refiere al nodo irregular. Para este caso en particular, las mallas son de 4x4 elementos MITC4 (ver Figura 5.4).

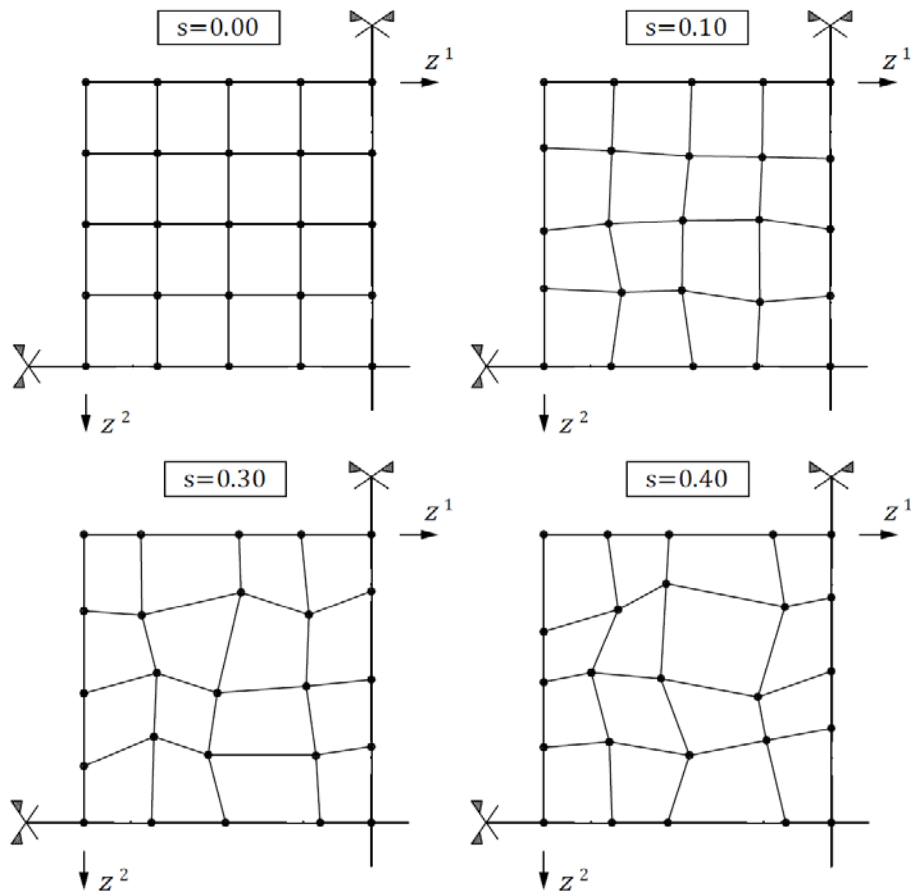


Figura 5.4: Mallas distorsionadas de 4x4 en un cuarto de placa.

La Tabla 5.4 presenta los resultados obtenidos, observándose que la solución de elementos finitos se ve ligeramente alterada al distorsionar la malla. El elemento MITC4 resulta poco sensible a la distorsión.

Referencia	Factor de distorsión	Relación h/a					
		0.50	0.25	0.10	0.05	0.02	0.01
Actual	0.00	5.3275	1.9567	0.73492	0.50851	0.43944	0.42933
	0.10	5.3296	1.9581	0.73539	0.50864	0.43943	0.42927
	0.30	5.3266	1.9537	0.73155	0.5049	0.43555	0.42534
	0.40	5.3465	1.9561	0.73059	0.50417	0.43502	0.42482

Tabla 5.4: Efecto de la distorsión de la malla en la solución.

5.2 Verificación numérica de los multiplicadores de Lagrange.

Una determinación precisa de las tensiones transversales interlaminares en los laminados compuestos resulta muy importante en el estudio de los modos de daño entre láminas,

principalmente en la iniciación y propagación de mecanismos de delaminación (falla de la junta adhesiva). En particular, las tensiones interlaminares adquieren valores picos de gran magnitud en regiones cercanas a discontinuidades tales como agujeros, bordes libres de tracción y frentes de delaminación. En dichas zonas el estado tensional es altamente tridimensional, aunque disminuye rápidamente al alejarse de los bordes. Este efecto es conocido como “free-edge”. En las formulaciones de desplazamientos, como ya se ha mencionado, las tensiones interlaminares son computadas integrando las ecuaciones de equilibrio de la Elasticidad tridimensional, a partir de las tensiones en el plano provistas por el modelo de elementos finitos. Esta técnica de post-procesamiento lleva implícita una pérdida de precisión al ser necesario calcular las segundas derivadas de los desplazamientos, dado que generalmente las funciones de interpolación no satisfacen los requisitos de continuidad requeridos. En este sentido, los modelos mixtos adquieren mayor relevancia al permitir una evaluación directa de las tensiones interlaminares. El objeto de este problema es analizar la *performance* numérica de los multiplicadores de Lagrange que representan las fuerzas superficiales interlaminares entre capas.

Se analiza una placa cuadrada con propiedades de materiales, secuencia de laminado, condiciones de borde y estado de carga iguales a los del primer ejemplo. El espesor de discretiza en 24 capas de cálculo de altura $h_i = h/24$ (8 *layers* por cada lámina), asegurando una correcta distribución de las tensiones a lo largo de la dimensión transversal de la placa.

Se comparan en la [Tabla 5.5](#) y [Tabla 5.6](#) los esfuerzos de corte transversales al plano computados mediante los multiplicadores de Lagrange, respecto de los valores de la Elasticidad ([Pagano, 1970](#)). La distribución a través del espesor para una relación $h/a=0.25$, es expuesta en la [Figura 5.5](#) y [Figura 5.6](#).

Relación h/a	$\bar{\sigma}_{13}$		Relación Actual/Pagano
	Actual	Pagano (1970)	
0.50	0.1693 ^L	0.164	1.033
0.25	0.2585 ^L	0.256	1.010
0.10	0.3594 ^L	0.357	1.007
0.05	0.3878 ^L	0.385	1.007
0.02	0.3904 ^L	0.393	0.993
0.01	0.3721 ^L	0.395	0.942

Tabla 5.5: Comparación de las tensiones transversales de corte $\bar{\sigma}_{13}$. Laminado cuadrado (0°/90°/0°) simplemente apoyado baja carga sinusoidal.

Relación h/a	$\bar{\sigma}_{23}$		Relación Actual/Pagano
	Actual	Pagano (1970)	
0.50	0.2710 ^L	0.2591	1.046
0.25	0.2186 ^L	0.2172	1.007
0.10	0.1231 ^L	0.1228	1.002
0.05	0.0932 ^L	0.0938	0.993
0.02	0.0833 ^L	0.0842	0.990
0.01	0.0792 ^L	0.0828	0.957

Tabla 5.6: Comparación de las tensiones transversales de corte $\bar{\sigma}_{23}$. Laminado cuadrado (0°/90°/0°) simplemente apoyado baja carga sinusoidal.

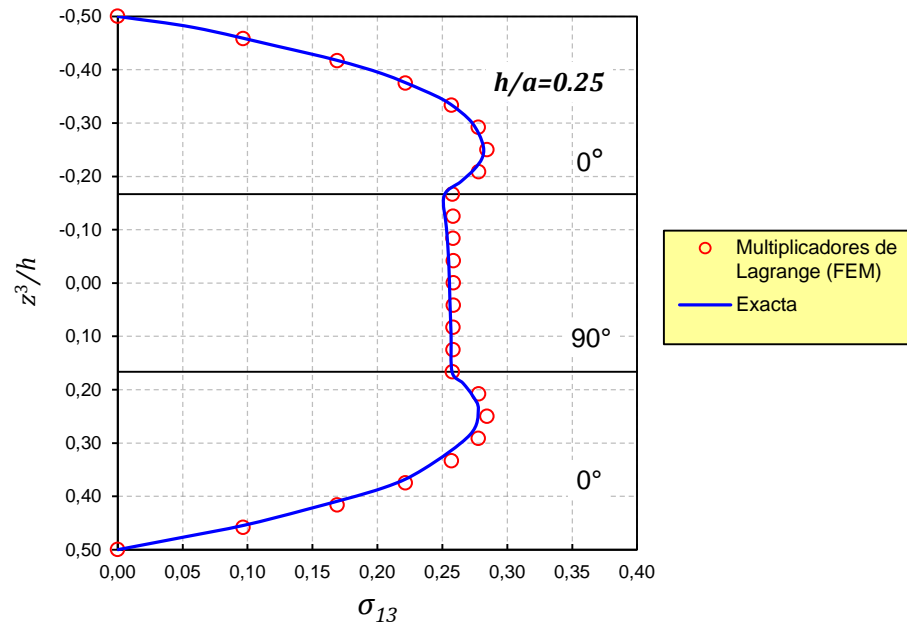


Figura 5.5: Variación a lo largo del espesor de la tensión de corte transversal $\bar{\sigma}_{13}(0, b/2, \bar{z}^3)$ para $h/a=0.25$. Laminado cuadrado ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) simplemente apoyado bajo carga sinusoidal.

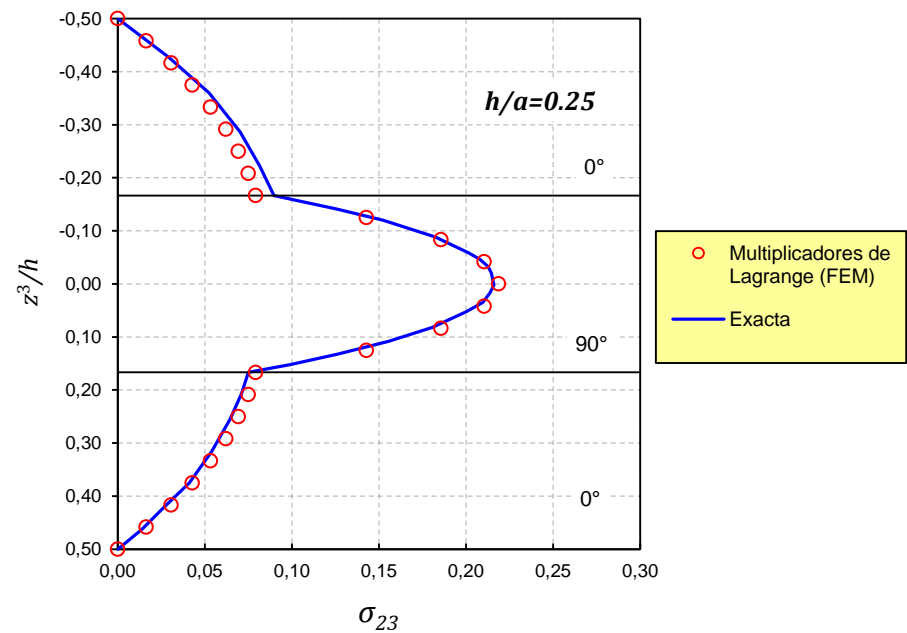


Figura 5.6: Variación a lo largo del espesor de la tensión de corte transversal $\bar{\sigma}_{23}(a/2, 0, \bar{z}^3)$ para $h/a=0.25$. Laminado cuadrado ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) simplemente apoyado bajo carga sinusoidal.

Las tensiones transversales de corte tienden a cero conforme se acercan a los bordes libres. A diferencia de los materiales isotrópicos homogéneos, el valor máximo puede no estar ubicado en la mitad del espesor. A pesar de que el esquema de laminación es simétrico, conforme se incrementa la relación h/a , la tensión normal transversal σ_{33} conduce a una variación no simétrica de las tensiones (y también de los desplazamientos) a lo largo de espesor, como lo indica la solución exacta. Esta asimetría no puede ser representada si se desprecian los efectos de σ_{33} .

En la [Figura 5.7](#) se compara gráficamente la distribución de la tensión normal transversal al plano para una relación $h/a=0.02$. El perfil esquematizado resulta coherente con la solución de la Elasticidad, pese a no considerar deformable la normal transversal.

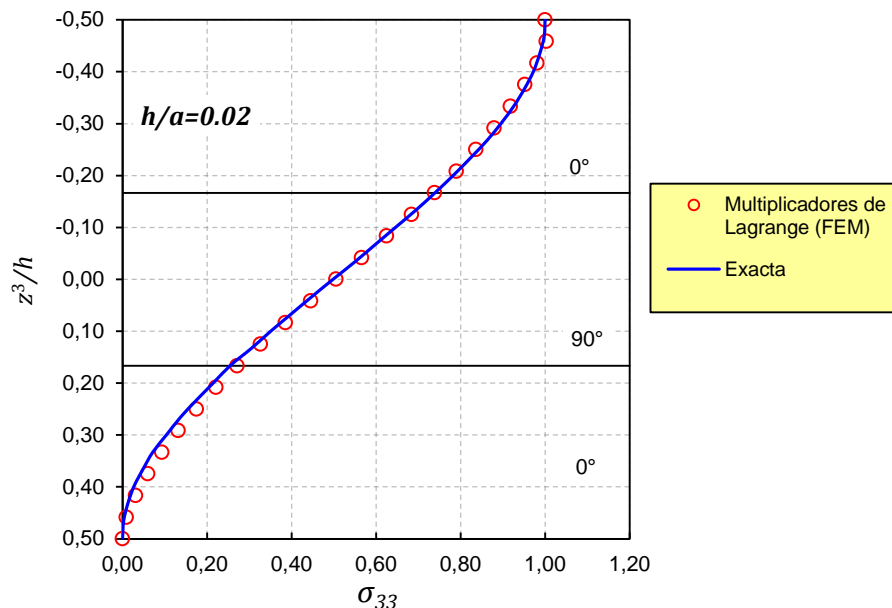


Figura 5.7: Distribución a lo largo del espesor de la tensión normal transversal $\bar{\sigma}_{33}(a/2, b/2, \bar{z}^3)$ para $h/a=0.02$. Laminado cuadrado ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) simplemente apoyado bajo carga sinusoidal.

En el análisis de vibraciones libres, se considera para una relación $h/a = 0.30$, dos placas cuadradas con secuencias de laminado $(0^\circ/90^\circ)$ y $(0^\circ/90^\circ)_2$, mientras que para una relación $h/a = 0.20$, una placa cuadrada con un esquema $(0^\circ/90^\circ)_5$. La variación de las tensiones transversales modales computadas por medio de los multiplicadores de Lagrange es expuesta en la [Figura 5.8](#), [Figura 5.9](#) y [Figura 5.10](#). Los valores obtenidos son divididos por su máximo valor absoluto. Se encuentra una correlación entre los resultados conseguidos y los presentados por la solución de la Elasticidad de [Noor \(1973\)](#), la solución analítica de la Teoría de Orden Superior de [Matsunaga \(2000\)](#), y la solución tridimensional mixta de elementos finitos de [Desai et al. \(2003\)](#). La historia de convergencia del método de resolución de autovalores es presentada en la [Figura 5.11](#). Se nota buena velocidad de convergencia, alcanzándose la tolerancia establecida en unas pocas iteraciones en los tres casos.

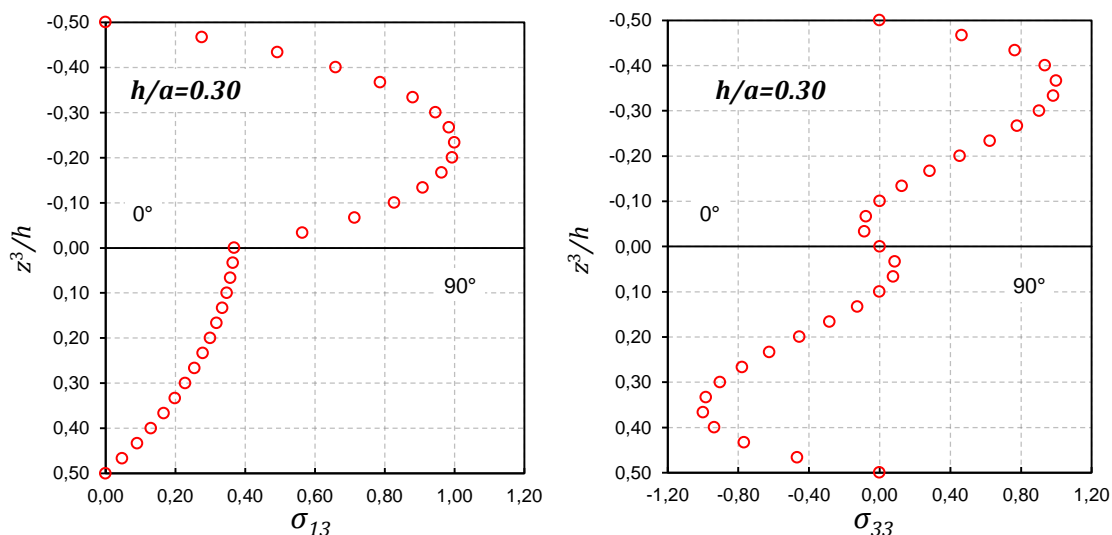


Figura 5.8: Tensión de corte transversal $\bar{\sigma}_{13}(0, b/2, \bar{z}^3)$ y tensión normal transversal $\bar{\sigma}_{33}(a/2, b/2, \bar{z}^3)$ modales para una placa laminada ($0^\circ/90^\circ$) simplemente apoyada. ($E_L/E_T=30$ – 30 capas de cálculo).

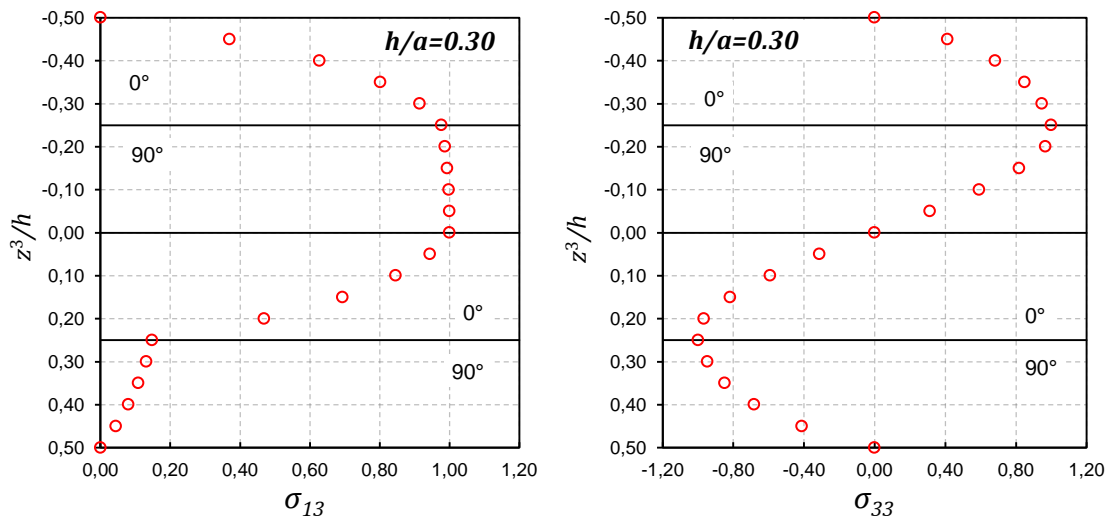


Figura 5.9: Tensión de corte transversal $\bar{\sigma}_{13}(0, b/2, \bar{z}^3)$ y tensión normal transversal $\bar{\sigma}_{33}(a/2, b/2, \bar{z}^3)$ modales para una placa laminada $(0^\circ/90^\circ)_2$ simplemente apoyada. ($E_L/E_T=30$ – 20 capas de cálculo).

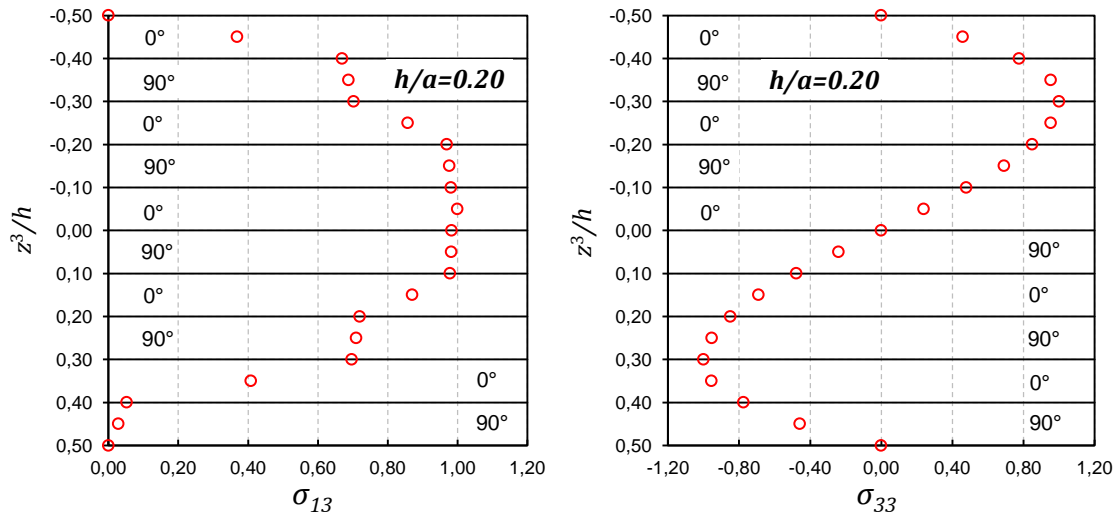


Figura 5.10: Tensión de corte transversal $\bar{\sigma}_{13}(0, b/2, \bar{z}^3)$ y tensión normal transversal $\bar{\sigma}_{33}(a/2, b/2, \bar{z}^3)$ modales para una placa laminada $(0^\circ/90^\circ)_5$ simplemente apoyada. ($E_L/E_T=30$ – 20 capas de cálculo).

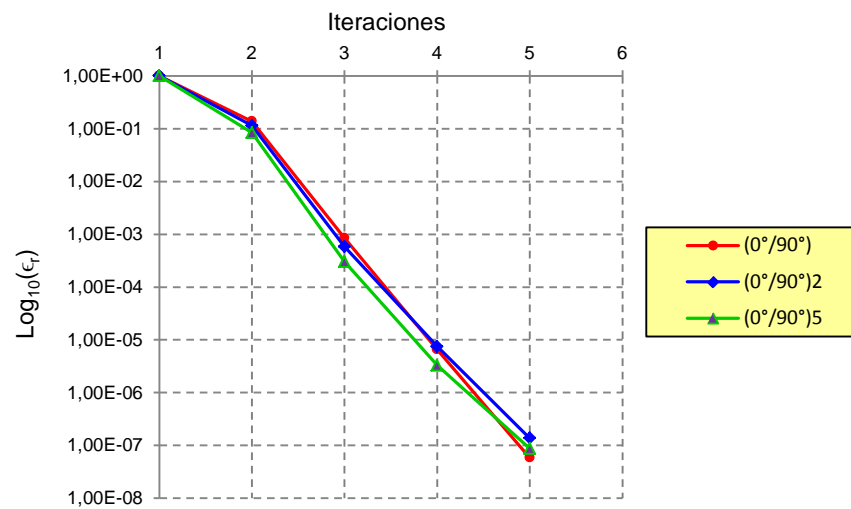


Figura 5.11: Historia de convergencia en la solución de los autovalores.

5.3 Placa Multicapas. Efecto Zig-Zag.

En aplicaciones prácticas, las estructuras compuestas suelen tener una gran cantidad de láminas, en algunos casos, 100 o más. Resulta apropiado, entonces, estudiar la respuesta del modelo en situaciones donde se tiene un número alto de capas reales.

Se analiza una placa cuadrada con una secuencia $(0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ)$ ("Nine Layers Symmetric Cross-Ply") para tres relaciones espesor/lado diferentes. Las propiedades mecánicas del material, las condiciones de contorno y el estado de cargas concuerdan con lo fijado en el primer problema. La altura total de las láminas orientadas a cero grados es la misma que la de las láminas orientadas a noventa grados (i.e., $h_{0^\circ} = h/10$, $h_{90^\circ} = h/8$). El espesor se discretiza en 18 capas de cálculo, correspondiendo 2 para cada una de las láminas (i.e., $h_{i0^\circ} = h/10/2$, $h_{i90^\circ} = h/8/2$).

Los resultados son comparados en la [Tabla 5.7](#) con la solución analítica de la Elasticidad ([Pagano & Hatfield, 1972](#)). En la [Figura 5.12](#), para una relación $h/a=0.25$, se muestran los desplazamientos en la dirección z^3 para el cuarto de placa modelado. Para la misma relación espesor/lado, en la [Figura 5.13-Figura 5.15](#) se presenta la variación de tensiones en el plano a través del espesor, donde se aprecia cómo se distribuyen los esfuerzos en cada lámina en función a la orientación de sus fibras. Esta característica permite apilar las láminas, cada una orientada según los requerimientos de diseño, optimizando el uso del material.

h/a	Referencia	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{11}$	$\bar{\sigma}_{22}$	$\bar{\sigma}_{12}$	$\bar{\sigma}_{13}$	$\bar{\sigma}_{23}$
0.50	Actual	5.5820	0.9829	0.9150	-0.0609	0.2094 ^L	0.2003 ^L
	Pagano & Hatfield (1972)	5.2992	1.260	1.051	-0.0722	0.204	0.194
0.25	Actual	1.7865	0.6541	0.6119	-0.0332	0.2243 ^L	0.2252 ^L
	Pagano & Hatfield (1972)	1.7591	0.684	0.628	-0.0337	0.223	0.223
0.10	Actual	0.6528	0.5423	0.4691	-0.0231	0.2482 ^L	0.2271 ^L
	Pagano & Hatfield (1972)	0.6520	0.551	0.477	-0.0233	0.247	0.226
0.01	Actual	0.4312	0.5289	0.4234	-0.0209	0.2397 ^L	0.2027 ^L
	Pagano & Hatfield (1972)	0.4334	0.539	0.431	-0.0213	0.259	0.219

Tabla 5.7: Deflexión central y tensiones para una placa cuadrada simplemente apoyada con una secuencia $(0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ)$ bajo una carga sinusoidal.

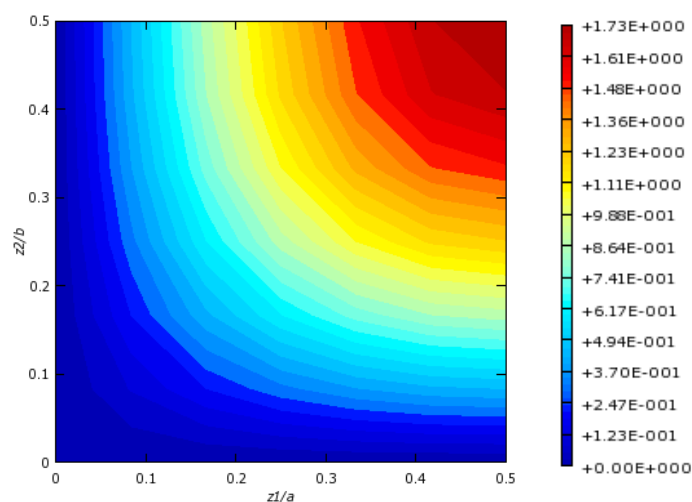


Figura 5.12: Desplazamientos transversales $\bar{w}(\bar{z}^1, \bar{z}^2)$ para $h/a=0.25$. Placa cuadrada laminada $(0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ)$ simplemente apoyada bajo carga sinusoidal.

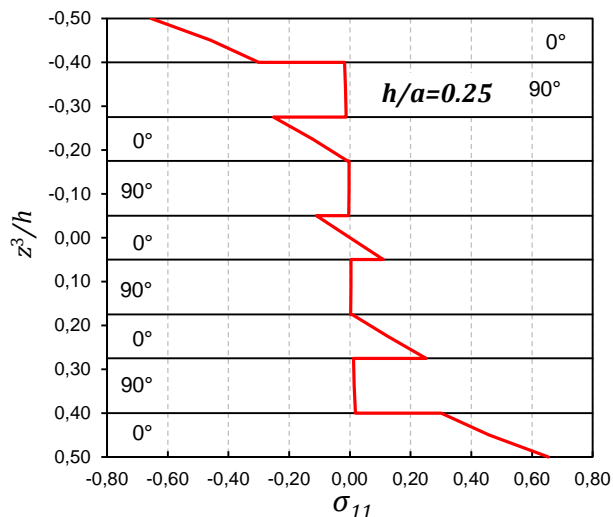


Figura 5.13: Tensión normal en el plano $\bar{\sigma}_{11}(a/2, b/2, \bar{z}^3)$. Placa cuadrada simplemente apoyada con esquema de laminación $(0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ)$ bajo carga sinusoidal. Relación $h/a=0.25$.

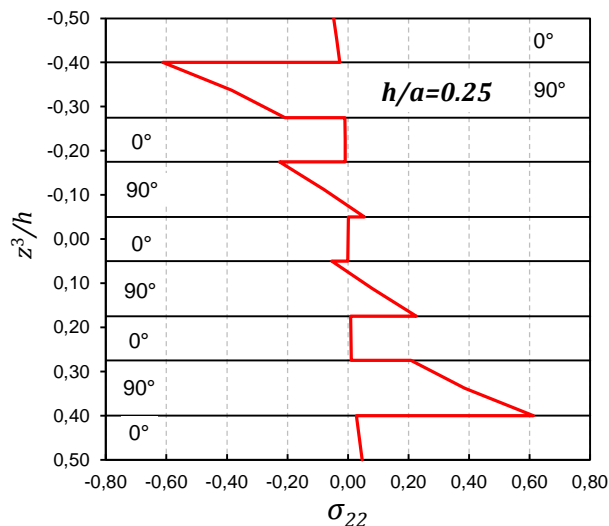


Figura 5.14: Tensión normal en el plano $\bar{\sigma}_{22}(a/2, b/2, \bar{z}^3)$. Placa cuadrada simplemente apoyada con esquema de laminación $(0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ)$ bajo carga sinusoidal. Relación $h/a=0.25$.

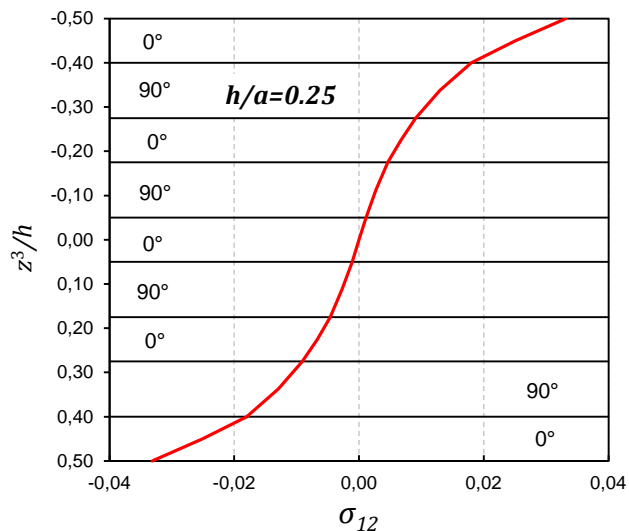


Figura 5.15: Tensión de corte en el plano $\bar{\sigma}_{12}(0, 0, \bar{z}^3)$. Placa cuadrada simplemente apoyada con esquema de laminación $(0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ)$ bajo carga sinusoidal. Relación $h/a=0.25$.

El desplazamiento en el plano $\bar{u}_1(0, b/2, \bar{z}^3)$ a lo largo del espesor es expuesto en la [Figura 5.16](#). Se pone en evidencia el alabeo de la sección en el caso de las placas gruesas (alta relación espesor/lado). Este efecto *zig-zag*, ya mencionado, es producto de la discontinuidad de las propiedades mecánicas a través del espesor, siendo más pronunciado en laminados donde el módulo de corte transversal varía en forma repentina en su altura. Teorías como la CPT o la FSDT, ignoran por completo este cambio brusco de la pendiente en las interfaces entre láminas, no resultando, en un primer momento, adecuadas para placas gruesas. Por su parte, para placas delgadas, la hipótesis de sección plana parece mantenerse, en concordancia con la CPT.

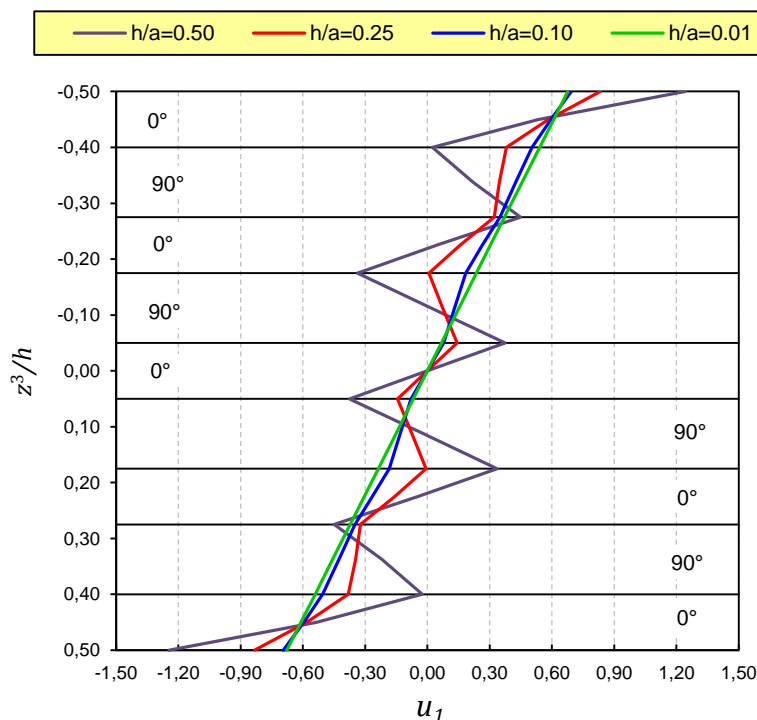


Figura 5.16: Desplazamiento en el plano $\bar{u}_1(0, b/2, \bar{z}^3)$ para varias relaciones espesor/lado. Placa laminada $(0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ)$ cuadrada simplemente apoyada bajo carga sinusoidal.

5.4 Vibraciones libres. Efectos de la anisotropía en la frecuencia natural.

En este problema se estudian los efectos en la solución del número de láminas así como del grado de ortotropía individual de las mismas. Se tiene una placa compuesta cuadrada simplemente apoyada con una relación espesor/lado definida $h/a = 0.20$. La relación E_L/E_T así como el número de láminas, varían. El resto de las propiedades del material son las definidas previamente. Los resultados son exhibidos en la [Tabla 5.8](#), notándose una excelente correlación con la solución de la Elasticidad ([Noor, 1973](#)). El modelo brinda una mejor predicción de la frecuencia natural al incrementar el número de capas de cálculo, independientemente de los parámetros analizados (ver [Figura 5.17](#), [Figura 5.18](#) y [Figura 5.19](#)). En aquellos casos donde las láminas presentan una fuerte ortotropía (*i.e.*, alta relación E_L/E_T), la discretización del espesor adquiere mayor trascendencia debido a la alta flexibilidad transversal respecto de la deformabilidad en el plano. Se tiene que a medida que se incrementa el número de láminas (*i.e.*, el grado de anisotropía global de la placa), también lo hace la frecuencia fundamental, tal como se observa en la [Figura 5.20](#). Lo mismo ocurre al aumentar el grado de ortotropía individual de las láminas.

Laminado	Referencia	Capas de cálculo	Relación E_L/E_T				
			3	10	20	30	40
$(0^\circ/90^\circ)$	Actual	2 layers	6.3374	7.0814	7.8053	8.3455	8.7696
		4 layers	6.2838	7.0361	7.7696	8.3162	8.7448
		6 layers	6.2701	7.0123	7.7253	8.2497	8.6571
		8 layers	6.2650	7.0029	7.7072	8.2222	8.6207
		10 layers	6.2626	6.9984	7.6983	8.2088	8.6029
	Noor (1973)	-	6.2577	6.9845	7.6745	8.1762	8.5625
$(0^\circ/90^\circ)_2$	Actual	4 layers	6.5597	8.2019	9.5224	10.3290	10.8790
		8 layers	6.5375	8.1456	9.4198	10.1910	10.7150
		12 layers	6.5331	8.1345	9.3993	10.1620	10.6800
	Noor (1973)	-	6.5455	8.1445	9.4055	10.1650	10.6797
$(0^\circ/90^\circ)_3$	Actual	6 layers	6.6036	8.4281	9.8824	10.7620	11.3570
		12 layers	6.5930	8.3993	9.8283	10.6880	11.2680
	Noor (1973)	-	6.6100	8.4142	9.8397	10.6957	11.2727
$(0^\circ/90^\circ)_5$	Actual	10 layers	6.6266	8.5478	10.0770	11.0030	11.6300
	Noor (1973)	-	6.6457	8.5625	10.0842	11.0027	11.6245

Tabla 5.8: Efecto del número de capas y del grado de ortotropía de las láminas individuales en la frecuencia fundamental para una placa cuadrada simplemente apoyada con $h/a=0.20$.

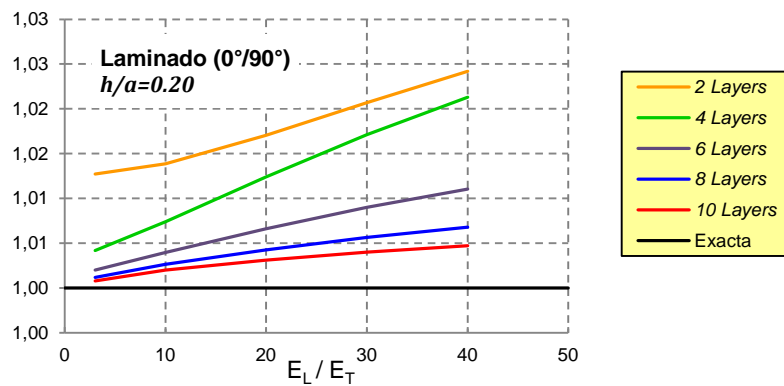


Figura 5.17: Efecto del número de capas de cálculo y del grado de ortotropía de las láminas en la solución de la frecuencia natural. Laminado $(0^\circ/90^\circ)$. Eje de ordenadas: $\bar{\omega}_{ACTUAL}/\bar{\omega}_{EXACTA}$.

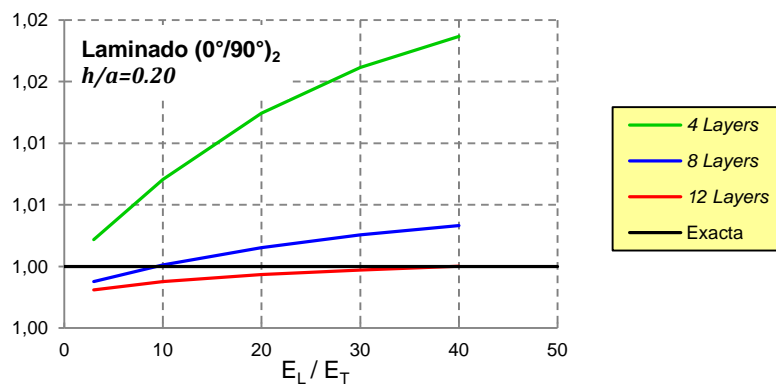


Figura 5.18: Efecto del número de capas de cálculo y del grado de ortotropía de las láminas en la solución de la frecuencia natural. Laminado $(0^\circ/90^\circ)_2$. Eje de ordenadas: $\bar{\omega}_{ACTUAL}/\bar{\omega}_{EXACTA}$.

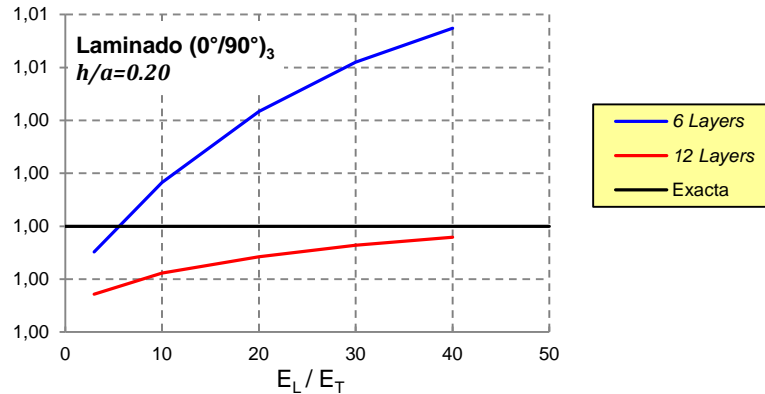


Figura 5.19: Efecto del número de capas de cálculo y del grado de ortotropía de las láminas en la solución de la frecuencia natural. Laminado $(0^\circ/90^\circ)_3$. Eje de ordenadas: $\bar{\omega}_{ACTUAL}/\bar{\omega}_{EXACTA}$.

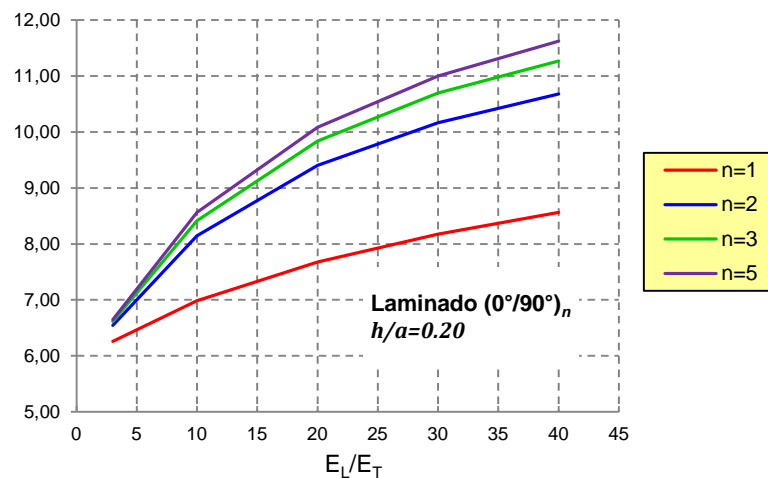


Figura 5.20: Efecto del grado de ortotropía individual de las láminas y del grado de anisotropía global en la frecuencia natural. Solución de la Elasticidad (Noor, 1973). Eje de ordenadas: $\bar{\omega}$.

5.5 Placa Sandwich.

Los paneles *sandwichs* representan un caso particular de placas compuestas. El desarrollo de los mismos surge a partir de la necesidad de elementos estructurales de gran resistencia y rigidez, que a su vez sean livianos. En el caso más general, están constituidos por dos láminas exteriores llamadas pieles (“Skins”) ligadas por un material de relleno de baja densidad, denominado núcleo (“Core”), capaz de transmitir esfuerzos de corte. La presencia del núcleo, que puede ser de Panal de Abeja (“Honeycomb Core”) o de espuma (“Foam Core”), tiene como objeto principal aumentar el brazo interno, mejorando notablemente la resistencia y rigidez, con un mínimo incremento de peso (ver Figura 5.21).

En la industria de la construcción su uso resulta atractivo debido a sus buenas propiedades de aislación térmica y acústica, facilidad de montaje, elevada resistencia mecánica y bajo peso en comparación a otros materiales tradicionales. Otros usos implican partes de satélites, cubiertas de embarcaciones, y fuselajes de aeronaves.

Se analiza, para diferentes relaciones espesor/lado, una placa *sandwich* simplemente apoyada con un esquema $(0^\circ/C/0^\circ)$, en donde “C” denota el núcleo cuyas características mecánicas son,

$$\begin{aligned} \frac{E_{11}^{(c)}}{E_T^{(s)}} = \frac{E_{22}^{(c)}}{E_T^{(s)}} = 0.04 & \quad \nu_{12}^{(c)} = 0.25 \\ \frac{G_{13}^{(c)}}{E_T^{(s)}} = \frac{G_{23}^{(c)}}{E_T^{(s)}} = 0.06 & \quad \frac{G_{12}^{(c)}}{E_T^{(s)}} = 0.016 \end{aligned} \quad (5.6)$$

Los superíndices “c”, “s” refieren al núcleo y a las caras o pieles, respectivamente. La altura se discretizó en 20 capas de cálculo iguales, asignándose 2 para cada piel y 16 para el núcleo (i.e., el espesor de cada piel es $h/10$, mientras que el de núcleo es $h/8$).


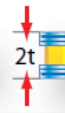
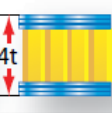
	Solid Material	Core Thickness t	Core Thickness $3t$
			
Thickness	1.0	7.0	37.0
Flexural Strength	1.0	3.5	9.2
Weight	1.0	1.03	1.06

Figura 5.21: Resistencia y rigidez de construcciones tipo *sandwich* con núcleo *honeycomb* en comparación con elementos laminados (F. A. A., 2012).

Los esfuerzos obtenidos son contrastados en la [Tabla 5.9](#) con la solución de la Elasticidad (Pagano, 1970; Kant et. al., 2008) y por elementos finitos mixtos 3D de Ramtekkar et. al. (2003).

h/a	Referencia	$\bar{\sigma}_{11}$	$\bar{\sigma}_{22}^*$	$\bar{\sigma}_{12}$	$\bar{\sigma}_{13}$	$\bar{\sigma}_{23}$
0.25	Actual	1.5124	0.2482	-0.1455	0.2404	0.1071
	Pagano (1970)	1.5560	0.2595	-0.1437	0.2390	0.1072
	Kant et. al. (2008)	1.5560	0.2590	-0.1440	0.2390	0.1070
	Ramtekkar et. al.(2003)	1.5700	0.2600	-0.1450	0.2400	0.1080
0.10	Actual	1.1330	0.1077	-0.0703	0.3016	0.0528
	Pagano (1970)	1.1530	0.1104	-0.0707	0.3000	0.0527
	Kant et. al. (2008)	1.1530	0.1100	-0.0707	0.3000	0.0527
	Ramtekkar et. al.(2003)	1.1590	0.1110	-0.0710	0.3030	0.0550
0.05	Actual	1.0899	0.0686	-0.0503	0.3194	0.0362
	Pagano (1970)	1.1100	0.0700	-0.0511	0.3170	0.0361
	Kant et. al. (2008)	1.1100	0.0700	-0.0510	0.3170	0.0360
	Ramtekkar et. al.(2003)	1.1150	0.0700	-0.0510	0.3170	0.0360
0.01	Actual	1.0768	0.0540	-0.0429	0.3169	0.0297
	Pagano (1970)	1.098	0.550	-0.0437	0.324	0.0297
	Kant et. al. (2008)	-	-	-	-	-
	Ramtekkar et. al.(2003)	-	-	-	-	-

*Corresponde a la coordenada $z = 0.5 h$.

Tabla 5.9: Tensiones para una placa *sandwich* cuadrada simplemente apoyada con un esquema ($0^\circ/C/0^\circ$) bajo una carga sinusoidal.

El desplazamiento en el plano $\bar{u}_1(0, b/2, \bar{z}^3)$ a lo largo del espesor es expuesto en la [Figura 5.22](#). Nuevamente, se observa el alabeo de la sección para altas relaciones espesor/lado, efecto que se atenúa conforme dicha relación baja, hasta prácticamente desaparecer.

En la [Figura 5.23](#) queda descubierto el mecanismo de funcionamiento de las construcciones *sandwich*: las pieles son tomadas los esfuerzos por flexión, mientras que los esfuerzos de corte son capturados prácticamente en su totalidad por el núcleo. En este sentido, puede trazarse una analogía con un perfil “*doble T*”, donde las pieles representan las alas del perfil, mientras que el núcleo simboliza el alma del mismo.

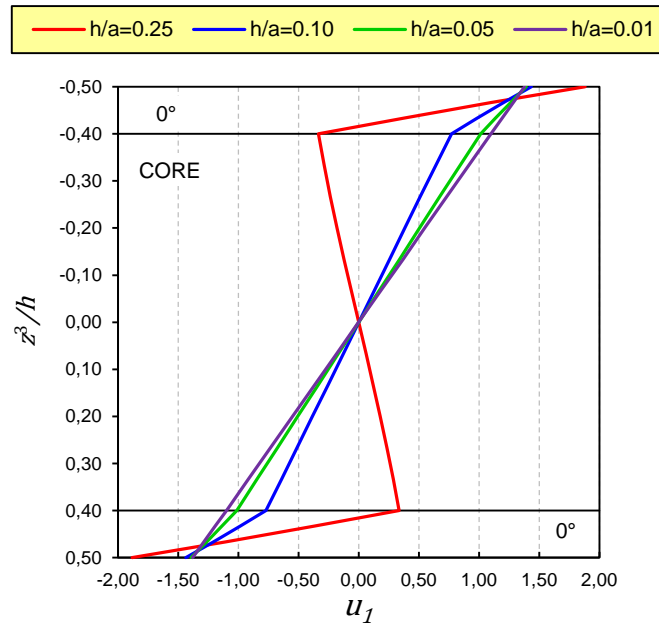


Figura 5.22: Desplazamiento en el plano $\bar{u}_1(0, b/2, \bar{z}^3)$ para varias relaciones espesor/lado. Placa *sandwich* (0°/C/0°) cuadrada simplemente apoyada bajo carga sinusoidal.

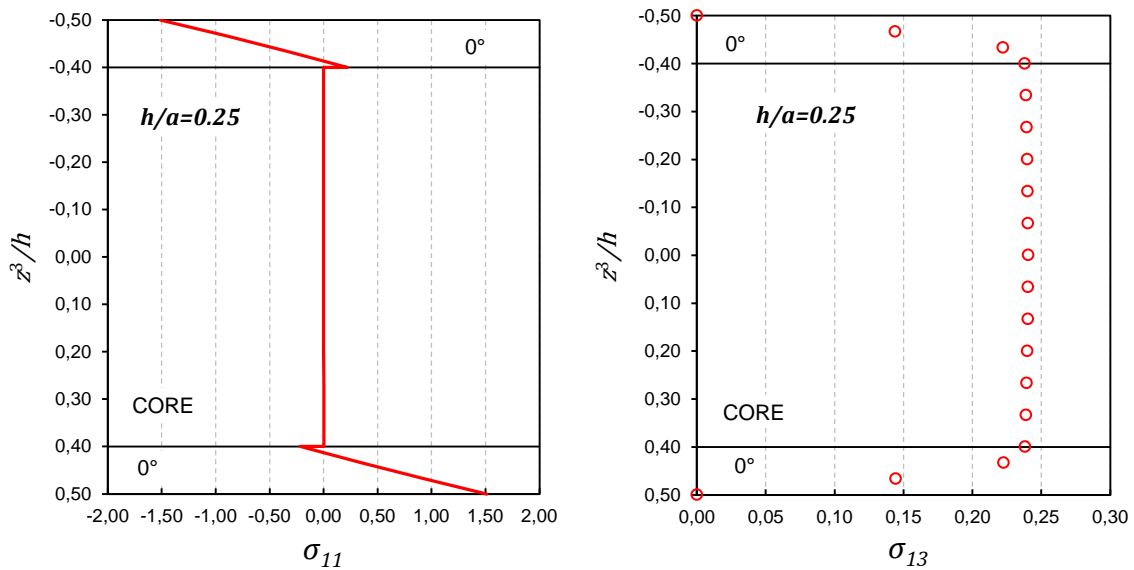


Figura 5.23: Tensión normal en el plano $\bar{\sigma}_{11}(a/2, b/2, \bar{z}^3)$ (Izquierda) y tensión transversal de corte $\bar{\sigma}_{13}(0, b/2, \bar{z}^3)$. Placa *sandwich* (0°/C/0°) simplemente apoyada bajo carga sinusoidal. Relación $h/a=0.25$.

6 CONCLUSIONES

El análisis de placas compuestas ha sido considerado en este trabajo. Un modelo mixto de elementos finitos para el análisis de placas multicapas es presentado. Problemas clásicos de referencia para los cuales la solución de la elasticidad 3D está disponible han sido considerados en la verificación numérica, obteniéndose resultados satisfactorios.

Una principio variacional mixto ha sido desarrollado para derivar el conjunto de ecuaciones diferenciales que gobierna el problema y sus condiciones de contorno. La inclusión de los multiplicadores de Lagrange es justificada teóricamente (tanto desde el punto de vista matemático como físico) y, posteriormente, avalada por los resultados numéricos.

Los aspectos más relevantes del modelo se sintetizan a continuación,

- Cada capa puede ser modelada independientemente, expresando su cinemática mediante funciones arbitrariamente seleccionadas sin mayor atención en requisitos de conformidad. Desde este punto de vista, se tiene una formulación muy general. En este trabajo, la FSDT fue asumida en cada capa.
- La formulación puede ser interpretada como un enfoque híbrido en el espesor.
- La formulación por capas representa un enfoque quasi-tridimensional.
- Las tensiones transversales interlaminares $\{\sigma_{\alpha 3}, a = 1,2,3\}$ son directamente obtenidas sin necesidad de ninguna técnica de post-procesamiento que conlleve pérdida de precisión.
- Fácil implementación desde el punto de vista computacional.
- La formulación por capas no requiere ningún factor de corrección por corte.
- Desde el punto de vista de la formulación por elementos finitos, se requiere continuidad C^{-1} para las variables estáticas, mientras que para las variables cinemáticas, depende del campo de desplazamientos asumido en cada capa. En este trabajo, al adoptarse la FSDT, se requiere continuidad C^0 para dichas variables.
- La delaminación puede simularse en forma sencilla al suprimir los multiplicadores de Lagrange en la zona de estudio. Es importante en dicho caso, verificar que no exista superposición de láminas (problema no lineal de contacto).

Con respecto a la estrategia de resolución del sistema de ecuaciones del modelo de elementos finitos, el inconveniente de la matriz de rigidez no definida positiva típica de las formulaciones mixtas ha sido superado sin mayor complejidad a partir de la condensación de las variables cinemáticas, lo que permite obtener las variables estáticas en una primera instancia. Así mismo, esta metodología, en conjunto con el Método de Iteración Inversa, ha sido aplicada en el problema de autovalores.

Finalmente, algunas importantes conclusiones derivadas de los resultados numéricos son establecidas,

- El modelo de elementos finitos converge a la solución analítica conforme se refina la malla en el plano.

- La formulación MITC resulta en un elemento finito insensible a la relación h/a , aún para mallas con diferentes grados de distorsión.
- En placas gruesas, la deformación normal transversal juega un rol relevante y debe ser tomada en cuenta indefectiblemente a los efectos de obtener resultados precisos, especialmente en placas *sandwich*. Para placas delgadas, esto no es cierto.
- En placas gruesas, la discretización del espesor mejora la solución numérica debido a que la energía de deformación por corte se computa con mayor rigurosidad. En placas delgadas, este efecto pierde importancia y por lo tanto, no es necesario un refinamiento de la malla en el espesor.
- En placas delgadas, una variación lineal en el espesor de las componentes en el plano del campo de desplazamientos es correcta. No obstante, para placas gruesas, la sección se alabea y la hipótesis de secciones planas no es válida. El efecto *zig-zag* es debidamente reproducido empleando una aproximación lineal dentro de cada capa.
- Cuando las láminas presentan una fuerte relación de ortotropía, la discretización del espesor adquiere mayor trascendencia a causa de la alta flexibilidad transversal respecto de la deformabilidad en el plano.

REFERENCIAS

- Alliney, S., & Carnicer, R. S. (1992). A hybrid finite element model for multilayered plates. *Computational Mechanics*, 10(5), 319-333.
- Auricchio, F., & Sacco, E. (1999). A mixed-enhanced finite-element for the analysis of laminated composite plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44, 1481-1504.
- Barbero, E. J. (1999). *Introduction to Composite Materials Design* (First ed.). Taylor & Francis.
- Barbero, E. J., Reddy, J. N., & Teply, J. L. (1990). An accurate determination of stresses in thick laminates using a generalized plate theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29, 1-14.
- Basset, A. B. (1890). On the extension and flexure of cylindrical and spherical thin elastic shells. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 181(6), 433-480.
- Basset, A. B. (1894). On the deformation of thin elastic plates and shells. *American Journal of Mathematics*, 16(3), 254-290.
- Bathe, K. J. (1996). *Finite Element Procedures*. Prentice Hall.
- Bathe, K. J., & Dvorkin, E. N. (1985). A four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and a mixed interpolation. *Computational Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21, 367-383.
- Bathe, K. J., & Wilson, E. L. (1972). Large eigenvalue problems in dynamic analysis. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 98(6), 1471-1485.
- Bathe, K. J., & Wilson, E. L. (1973). Solutions methods for eigenvalue problems in structural mechanics. *International Center for Numerical Methods in Engineering*, 6, 213-226.
- Burden, R. L., & Faires, J. D. (2011). *Numerical Analysis* (Ninth ed.). Brooks/Cole, Cengage Learning.
- Carrera, E. (1997). C_z^0 requirements - models for the two dimensional analysis of multilayered structures. *Composite Structures*, 37(3/4), 373-383.
- Carrera, E. (1998a). Evaluation of layerwise mixed theories for laminated plates analysis. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 36(5), 830-838.
- Carrera, E. (1998b). Mixed layer-wise models for multilayered plates analysis. *Composite Structures*, 43, 57-70.
- Carrera, E. (1999). Transverse normal stress effects in multilayered plates. *Transactions of ASME*, 66, 1004-1012.
- Carrera, E. (2000a). An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates. *Composite Structures*, 50, 183-198.
- Carrera, E. (2000b). A priori vs. a posteriori evaluation of transverse stresses in multilayered orthotropic plates. *Composite Structures*, 48, 245-260.
- Carrera, E. (2000c). Single vs Multilayer plate modelings on the basis of Reissner's mixed theorem. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 38(2), 342-252.
- Carrera, E. (2002c). Theories and finite elements for multilayered anisotropic, composite plates and shells. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 9(2), 87-140.

- Carrera, E. (2003a). Historical review of Zig-Zag theories for multilayered plates and shells. *Applied Mechanics Reviews*, 56(3), 287-308.
- Carrera, E. (2003b). Theories and finite elements for multilayered plates and shells: A unified compact formulation with numerical assessment and benchmarking. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 10(3), 215-296.
- Carrera, E. (2003c). Two benchmarks to assess two-dimensional theories of sandwich, composite plates. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 41(7), 1356-1352.
- Carrera, E. (2004). On the use of the Murakami's Zig-Zag function in the modeling of layered plates and shells. *Computers & Structures*, 82, 541-554.
- Carrera, E., & Ciuffreda, A. (2005). A unified formulation to assess theories of multilayered plates for various bending problems. *Composite Structures*, 69, 271-293.
- Carrera, E., & Demasi, L. (2002a). Classical and advanced multilayered plate elements based upon PVD and RMVT. Part 1: Derivation of finite element matrices. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 55, 191-231.
- Carrera, E., & Demasi, L. (2002b). Classical and advanced multilayered plate elements based upon PVD and RMVT. Part 1: Numerical implementations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 55, 253-291.
- Chopra, A. K. (1995). *Dynamics of structures: theory and applications to earthquake engineering*. Prentice Hall.
- Demasi, L. (2005). Refined multilayered plate elements based on Murakami zig-zag functions. *Composite Structures*, 70, 308-316.
- Demasi, L. (2009a). ∞^6 mixed plate theories based on the Generalized Unified Formulation. Part I: Governing Equations. *Composite Structures*, 87, 1-11.
- Demasi, L. (2009b). ∞^6 mixed plate theories based on the Generalized Unified Formulation. Part II: Layerwise theories. *Composite Structures*, 87, 12-22.
- Demasi, L. (2009c). ∞^6 mixed plate theories based on the Generalized Unified Formulation. Part III: Advanced Mixed High Order Shear Deformation Theories. *Composite Structures*, 87, 183-194.
- Demasi, L. (2009d). ∞^6 mixed plate theories based on the Generalized Unified Formulation. Part IV: Zig-Zag Theories. *Composite Structures*, 87, 195-205.
- Demasi, L. (2009e). ∞^6 mixed plate theories based on the Generalized Unified Formulation. Part V: Results. *Composite Structures*, 88, 1-16.
- Demasi, L. (2009f). *An invariant model for any composite plate theory and FEM applications: the Generalized Unified Formulation*. American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- Demasi, L. (2012). *Partially layer-wise advanced zig-zag and HSDT models based on the Generalized Unified Formulation*. American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- Desai, Y. M., Ramtekkar, G. S., & Shah, A. H. (2003). Dynamics analysis of laminated composite plates using a layer-wise mixed finite element model. *Composite Structures*, 59, 237-249.
- Dvorkin, E. N. (1984a). *On nonlinear finite element analysis of shell structures*. Ph.D. Thesis, Massachusetts Institute of Technology (MIT), Department of Mechanical Engineering.
- Dvorkin, E. N., & Bathe, K. J. (1984b). A continuum mechanics based four-node shell element for general non-linear analysis. *Engineering computations*, 1, 77-88.

- Dvorkin, E. N., & Goldschmit, M. B. (2005). *Nonlinear continua*. Springer.
- Eaton, J. W., Bateman, D., & Hauberg, S. (2011). *GNU Octave: A high level interactive language for numerical computations*. Octave version 3.6.1.
- Federal Aviation Administration. (2012). *Aviation Maintenance Technician Handbook - Airframe (Vol. I)*. U.S. Department of Transportation.
- Fung, Y. C. (1965). *Foundations of solid mechanics*. Prentice Hall.
- Goldenevizer, A. L. (1960). *On Reissner's theory of the bending of plates*. NASA Technical Translation F-27.
- Hencky, H. (1947). Über die berücksichtigung der schubverzerrung in ebenen platen. *16*, 72-76.
- Hildebrand, F. B., Reissner, E., & Thomas, G. B. (1949). *Notes on the foundations of the theory of small displacements of orthotropic shells*. NASA Technical Note 1833.
- Jones, R. M. (1999). *Mechanics of composite materials* (Second ed.). Taylor & Francis.
- Kant, T. (1982). Numerical analysis of thick plates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *31*, 1-18.
- Kant, T., & Pandya, B. N. (1988). A simple finite element formulation of a higher-order theory for unsymmetrically laminated composite plates. *Composite Structures*, *9*, 215-246.
- Kant, T., Gupta, A. B., Pendhari, S. S., & Desai, Y. M. (2008). Elasticity solution for cross-ply composite and sandwich laminates. *Composite Structures*, *83*(1), 13-24.
- Kaw, A. K. (2006). *Mechanics of composite materials* (Second ed.). CRC Press.
- Mantari, J. L., Oktem, A. S., & Guedes Soares, C. (2012a). A new trigonometric shear deformation theory for isotropic, laminated composite and sandwich plates. *International Journal of Solids and Structures*, *49*, 43-53.
- Mantari, J. L., Oktem, A. S., & Guedes Soares, C. (2012b). A new trigonometric layerwise shear deformation theory for the finite element analysis of laminated composite and sandwich plates. *Computers and Structures*, *94-95*, 45-53.
- Matsunaga, H. (2000). Vibration and stability of cross-ply laminated composite plates according to a global higher-order plate theory. *Composite Structures*, *48*, 231-244.
- Mau, S. T. (1973). A refined laminated plate theory. *Journal of Applied Mechanics*, *40*(2), 606-607.
- Mindlin, R. D. (1951). Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, *18*, 31-38.
- Murakami, H. (1986). Laminated composite plate theory with improved in-plane response. *Journal of Applied Mechanics*, *53*(3), 661-665.
- Murthy, M. V. (1981). *An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plates*. NASA Technical Paper 1903.
- Noor, A. K. (1973). Free vibration of multilayered composite plates. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 1038-1039.
- Oñate, E. (2013). *Structural analysis with the Finite Element Method. Linear statics. Volume II. Beams, Plates and Shells*. (First ed.). CIMNE.

- Pagano, N. J. (1969). Exact solutions of composite laminates in cylindrical bending. *Journal of Composite Materials*, 3, 398-411.
- Pagano, N. J. (1970). Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates. *Journal of Composite Materials*, 4, 20-34.
- Pagano, N. J., & Hatfield, S. J. (1972). Elastic behavior of multilayered bidirectional composites. *Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 10, 931-933.
- Pendhari, S. S., Kant, T., & Desai, Y. M. (2008). Application of polymer composites in civil construction: A general review. *Composite Structures*, 84, 114-124.
- Ramtekkar, G. S., Desai, Y. M., & Shah, A. H. (2003). Application of a three-dimensional mixed finite element model to the flexure of sandwich plate. *Composite Structure*, 81, 2183-2198.
- Reddy, J. N. (1986). *A refined shear deformation theory for the analysis of laminated plates*. NASA Contractor Report 3955.
- Reddy, J. N. (1987). A generalization of two-dimensional theories of laminated composite plates. *Communications in Applied Numerical Methods*, 3, 173-180.
- Reddy, J. N. (2002). *Energy principles and variational methods in applied mechanics* (Second ed.). John Wiley and Sons Inc.
- Reddy, J. N. (2003). *Mechanics of composite plates and shells* (Second ed.). CRC Press.
- Reddy, J. N. (2006). *An introduction to the finite element method* (Third ed.). McGraw Hill.
- Reddy, J. N., Barbero, E. J., & Tepy, J. L. (1989). A plate bending element based on a generalized laminate plate theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28, 2275-2292.
- Reissner, E. (1944). On the theory of bending of elastic plates. *Journal of Mathematical Physics*, 23, 184-191.
- Reissner, E. (1986). On a mixed variational theorem and on shear deformable plate theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 23, 193-198.
- Rohwer, K., Friedrichs, S., & Wehmeyer, C. (2005). Analyzing laminated structures from Fibre-Reinforced composite material – An assessment. *TECHNISCHE MECHANIK*, 25(1), 59-79.
- Stoker, J. J. (1942). Mathematical problems connected with the bending and buckling of elastic plates. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 48, 247-261.
- Timoshenko, S. P., & Woinowsky-Krieger, S. (1959). *Theory of plates and shells* (First ed.). McGraw-Hill.
- Vinson, J. R., & Sierakowski, R. L. (2004). *The Behavior of Structures Composed of Composite Materials* (Second ed.). Kluwer Academic Publishers.
- Wang, C. M., Reddy, J. N., & Lee, K. H. (2000). *Shear deformable beams and plates: relationship with classical solutions* (First ed.). El Servier.
- Washizu, K. (1975). *Variational methods in elasticity and plasticity* (Second ed.). Pergamon Press.
- Zhang, Y. X., & Zhu, Y. (2010). A new composite element for FRP-reinforced concrete slabs. *Challenges, Opportunities and Solutions in Structural Engineering and Construction*.
- Zienkiewicz, O. C., & Taylor, R. L. (1994). *El Método de los Elementos Finitos: formulaciones básicas y problemas lineales*. McGraw Hill.

APÉNDICE A: Relación Constitutiva para láminas reforzadas con fibras

Sea una lámina reforzada unidireccionalmente con fibras continuas, se asume un modelo de material hiperelástico ortótropo. Los ejes principales del material de cada lámina son definidos tal que \tilde{z}^1 es tomado paralelo a la dirección de la fibra, \tilde{z}^2 transversal a la dirección de la fibra en el plano de la lámina, y \tilde{z}^3 perpendicular al plano de la lámina.

La relación tensión-deformación se expresa como,

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{AB} &= \tilde{C}_{ABCD} \tilde{\epsilon}_{CD} \\ \tilde{\sigma}_{A3} &= \tilde{C}_{A3C3} 2\tilde{\epsilon}_{C3}\end{aligned}\quad (\text{A.1})$$

La virgulilla ($\tilde{}$) indica que las cantidades están referidas al sistema de coordenadas del material $\{\tilde{z}^\alpha, \alpha = 1,2,3\}$. Las componentes no nulas del tensor Constitutivo son,

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{1111} &= \frac{E_L^2}{E_L - E_T \nu_{LT}^2} & \tilde{C}_{2222} &= \frac{E_L E_T}{E_L - E_T \nu_{LT}^2} & \tilde{C}_{1122} &= \frac{E_L E_T \nu_{LT}}{E_L - E_T \nu_{LT}^2} \\ \tilde{C}_{1212} &= G_{LT} & \tilde{C}_{1313} &= G_{L3} & \tilde{C}_{2323} &= G_{T3}\end{aligned}\quad (\text{A.2})$$

donde E_L, E_T representan los Módulos de Elasticidad en las direcciones \tilde{z}^1, \tilde{z}^2 , respectivamente, ν_{LT} es el coeficiente de Poisson que define la deformación en la dirección \tilde{z}^2 debido a un estiramiento uniaxial en la dirección \tilde{z}^1 , y G_{LT}, G_{L3}, G_{T3} son los Módulos de Rigidez a Corte en los planos \tilde{z}^1 - \tilde{z}^2 , \tilde{z}^1 - \tilde{z}^3 , \tilde{z}^2 - \tilde{z}^3 , respectivamente. Estos coeficientes elásticos son definidos, o bien, por consideraciones teóricas (p.ej., Teoría de Mezclas), o bien, por ensayos de laboratorio (ver [Jones, 1999](#)).

Las siguientes relaciones de simetría son presentes,

$$\tilde{C}_{\alpha\beta\gamma\mu} = \tilde{C}_{\gamma\mu\alpha\beta} = \tilde{C}_{\beta\alpha\gamma\mu} = \tilde{C}_{\alpha\beta\mu\gamma}$$

En las estructuras multicapas planas, las láminas son apiladas con sus planos \tilde{z}^1 - \tilde{z}^2 paralelos entre sí, pero con sus fibras orientadas arbitrariamente respecto del sistema de coordenadas del problema.

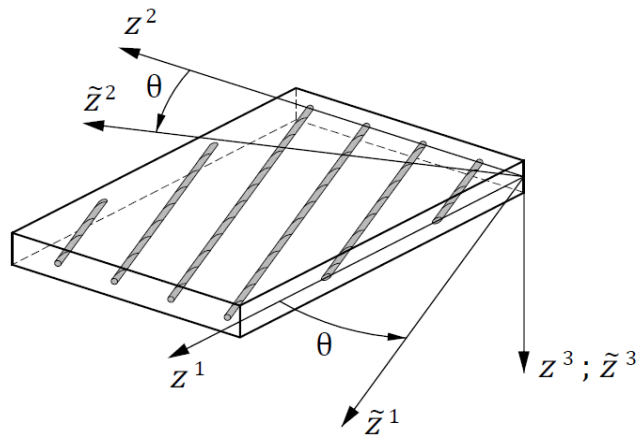


Figura A.1: Sistema de coordenadas material y del problema.

Sea $\{z^\alpha, \alpha = 1,2,3\}$ el sistema de coordenadas del problema, y sea $\{\tilde{z}^\alpha, \alpha = 1,2,3\}$ el sistema de coordenadas principal del material, tal que el eje z^3 es paralelo al eje \tilde{z}^3 (i.e., el plano z^1 - z^2 es paralelo al plano \tilde{z}^1 - \tilde{z}^2) y el eje \tilde{z}^1 es orientado un ángulo $+\theta$ en sentido anti-

horario respecto del eje z^1 (Figura A.1), las coordenadas de un punto en el sistema $\{z^\alpha\}$ son referidas en el sistema $\{\tilde{z}^\alpha\}$ como,

$$\tilde{z}^\alpha = l^\alpha_{\cdot\beta} z^\beta \quad (\text{A.3})$$

donde $l^\alpha_{\cdot\beta}$ son los cosenos directores,

$$\underline{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

La siguiente relación se cumple,

$$\underline{\mathbf{L}}^{-1} = \underline{\mathbf{L}}^T \quad (\text{A.5})$$

Al rotar las coordenadas $\{\tilde{z}^\alpha\}$ alrededor de la normal transversal a la lámina, los coeficientes elásticos $\tilde{C}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ transforman como componentes tensoriales de cuarto orden,

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} = l_\mu^{\cdot\alpha} l_\rho^{\cdot\beta} l_\eta^{\cdot\gamma} l_\kappa^{\cdot\delta} \tilde{C}_{\mu\rho\eta\kappa} \quad (\text{A.6})$$

En forma explícita, para cada componente no nula,

$$C_{1111} = \tilde{C}_{1111} \cos^4(\theta) + 2(\tilde{C}_{1122} + 2\tilde{C}_{1212}) \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) + \tilde{C}_{2222} \sin^4(\theta) \quad (\text{A.7})$$

$$C_{1122} = \tilde{C}_{1122} \cos^4(\theta) + (\tilde{C}_{1111} + \tilde{C}_{2222} - 4\tilde{C}_{1212}) \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) + \tilde{C}_{1122} \sin^4(\theta) \quad (\text{A.8})$$

$$C_{1112} = (\tilde{C}_{1122} + 2\tilde{C}_{1212} - \tilde{C}_{1111}) \cos^3(\theta) \sin(\theta) + (\tilde{C}_{2222} - 2\tilde{C}_{1212} - \tilde{C}_{1122}) \cos(\theta) \sin^3(\theta) \quad (\text{A.9})$$

$$C_{2222} = \tilde{C}_{2222} \cos^4(\theta) + 2(\tilde{C}_{1122} + 2\tilde{C}_{1212}) \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) + \tilde{C}_{1111} \sin^4(\theta) \quad (\text{A.10})$$

$$C_{2212} = (\tilde{C}_{2222} - 2\tilde{C}_{1212} - \tilde{C}_{1122}) \cos^3(\theta) \sin(\theta) + (\tilde{C}_{1122} + 2\tilde{C}_{1212} - \tilde{C}_{1111}) \cos(\theta) \sin^3(\theta) \quad (\text{A.11})$$

$$C_{1212} = (\tilde{C}_{1111} + \tilde{C}_{2222} - 2\tilde{C}_{1122} - 2\tilde{C}_{1212}) \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) + \tilde{C}_{1212} (\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta)) \quad (\text{A.12})$$

$$C_{1313} = \tilde{C}_{1313} \cos^2(\theta) + \tilde{C}_{2323} \sin^2(\theta) \quad (\text{A.13})$$

$$C_{1323} = (\tilde{C}_{2323} - \tilde{C}_{1313}) \cos(\theta) \sin(\theta) \quad (\text{A.14})$$

$$C_{2323} = \tilde{C}_{2323} \cos^2(\theta) + \tilde{C}_{1313} \sin^2(\theta) \quad (\text{A.15})$$

Desde luego, las condiciones de simetría del tensor elástico, previamente mencionadas, continúan siendo válidas.

De este modo, la relación tensión-deformación en las coordenadas del sistema se puede expresar en forma matricial como,

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \underline{\mathbf{C}} \cdot \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (\text{A.16})$$

donde,

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = [\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{12} \ \sigma_{13} \ \sigma_{23}]^T \quad (\text{A.17})$$

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = [\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ 2\varepsilon_{12} \ 2\varepsilon_{13} \ 2\varepsilon_{23}]^T \quad (\text{A.18})$$

$$\underline{\mathbf{C}} = \underline{\mathbf{T}} \cdot \underline{\tilde{\mathbf{C}}} \cdot \underline{\mathbf{T}}^T \quad (\text{A.19})$$

$$\underline{\tilde{\mathbf{C}}} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{1111} & \tilde{C}_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{C}_{1122} & \tilde{C}_{2222} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{C}_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{2323} \end{bmatrix} \quad (\text{A.20})$$

Teniendo en cuenta la siguiente identidad trigonométrica,

$$\sin(2\theta) = 2 \sin(\theta) \cos(\theta) \quad (\text{A.21})$$

la matriz de transformación $\underline{\mathbf{I}}$ es formada por inspección a partir de (A.7)-(A.15),

$$\underline{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \sin^2(\theta) & \sin(2\theta) & 0 & 0 \\ \sin^2(\theta) & \cos^2(\theta) & -\sin(2\theta) & 0 & 0 \\ -\sin(\theta) \cos(\theta) & \sin(\theta) \cos(\theta) & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (\text{A.22})$$

APÉNDICE B: Bloque por corte (*Shear-locking*)

A los efectos de discutir este fenómeno numérico, se considera el elemento isoparamétrico de viga de dos nodos con continuidad C^0 ("*Timoshenko beam element*") de la [Figura B.1](#), cuyo uno de sus extremos se encuentra empotrado, mientras que el restante es sujeto a un momento flector M_2 (ver [Bathe, 1996](#)). Se denominan L , b , h a las dimensiones coincidentes con los ejes z^1 , z^2 , z^3 , respectivamente.

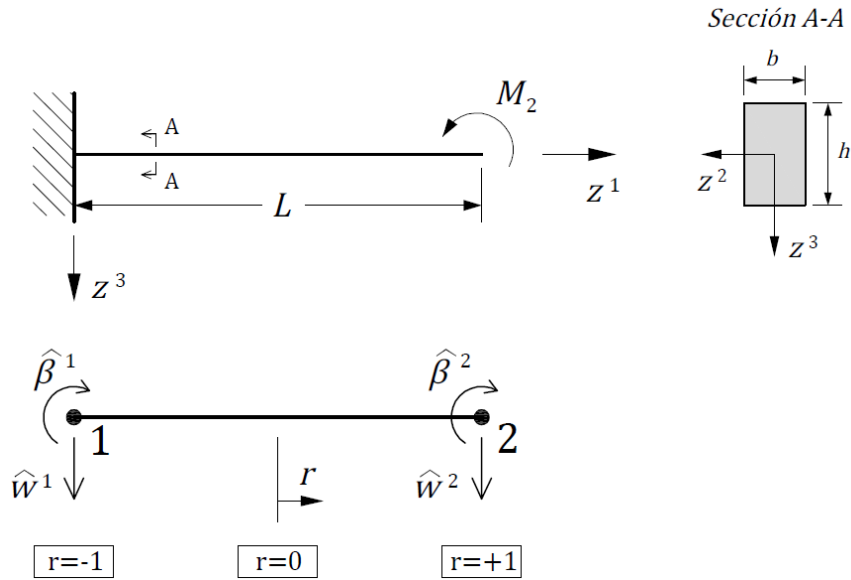


Figura B.1: Elemento isoparamétrico de viga.

En la formulación isoparamétrica,

$$z^1 = \sum_{k=1}^2 N_k \hat{z}_k^1 \quad (\text{B.1})$$

$$w = \sum_{k=1}^2 N_k \hat{w}^k \quad (\text{B.2})$$

$$\beta_1 = \sum_{k=1}^2 N_k \hat{\beta}_1^k \quad (\text{B.3})$$

donde w es el desplazamiento transversal, β_1 la rotación de la normal paralela al eje z^3 alrededor del eje z^2 y $\{N_k(r), r \in [-1; +1]\}$ las funciones de forma,

$$N_1 = \frac{1-r}{2} \quad (\text{B.4})$$

$$N_2 = \frac{1+r}{2}$$

La tilde circunfleja ($\hat{\quad}$) indica variable nodal. Vale destacar que la variación dentro del dominio del elemento de las variables interpoladas es lineal.

El Jacobiano de la transformación resulta,

$$J = \sum_{k=1}^2 N_{k,r} \hat{z}_k^1 = \frac{L}{2} \quad (\text{B.5})$$

Las derivadas de las variables cinemáticas respecto de la coordenada longitudinal z^1 son,

$$w_{,1} = \sum_{k=1}^2 N_{k,1} \hat{w}^k \quad (\text{B.6})$$

$$\beta_{1,1} = \sum_{k=1}^2 N_{k,1} \hat{\beta}_1^k \quad (\text{B.7})$$

Aplicando la Regla de la Cadena,

$$N_{k,1} = J^{-1} N_{k,r} \quad (\text{B.8})$$

y teniendo en cuenta (B.1)-(B.5), las expresiones (B.6) y (B.7) se pueden reescribir como,

$$w_{,1} = -\frac{1}{L} \hat{w}^1 + \frac{1}{L} \hat{w}^2 \quad (\text{B.9})$$

$$\beta_{1,1} = -\frac{1}{L} \hat{\beta}_1^1 + \frac{1}{L} \hat{\beta}_1^2 \quad (\text{B.10})$$

Asumiendo válidas las hipótesis de Timoshenko (versión unidimensional de la Teoría de Mindlin), la deformación por corte está dada por,

$$\gamma_{13} = w_{,1} - \beta_1 \quad (\text{B.11})$$

Introduciendo (B.3) y (B.9) en (B.11), y aplicando las condiciones de contorno del problema ($\hat{w}^1 = \hat{\beta}_1^1 = 0$),

$$\gamma_{13} = \frac{1}{L} \hat{w}^2 - \frac{1+r}{2} \hat{\beta}_1^2 \quad (\text{B.12})$$

Para este ejemplo en particular, la deformación por corte debe ser nula en todo el dominio del elemento. Imponiendo esté requisito,

$$0 = \frac{1}{L} \hat{w}^2 - \frac{1+r}{2} \hat{\beta}_1^2 \quad (\text{B.13})$$

Sabiendo que el primer término de la derecha en (B.13) es constante y el segundo término tiene variación lineal, la única forma de que se cumpla la igualdad anterior es que $\hat{w}^2 = \hat{\beta}_1^2 = 0$ y, por lo tanto, no exista deformación.

De igual manera, si se fuerza la condición (B.13) utilizando 2 puntos de Gauss $r = \pm 1/\sqrt{3}$ (i.e., integración completa), se obtiene que la única solución implica, nuevamente, $\hat{w}^2 = \hat{\beta}_1^2 = 0$.

No obstante, forzando (B.13) en un solo punto de Gauss $r = 0.0$ (i.e., integración reducida), se llega a la relación,

$$\hat{w}^2 = \frac{L}{2} \hat{\beta}_1^2 \quad (\text{B.14})$$

que puede cumplirse para $\hat{w}^2, \hat{\beta}_1^2$ distintos de cero.

Se pone en evidencia de este modo, cómo a causa de la interpolación empleada, la deformación por corte no puede anularse en todos los puntos del elemento utilizando integración completa. Este error no permite cumplir con la hipótesis de Bernoulli (o, Kirchhoff en placas) cuando el elemento es delgado, resultando en desplazamientos menores respecto de la solución exacta como consecuencia de una rigidez excesiva del modelo de elementos finitos.

A fin de estudiar cómo se comporta el elemento conforme la relación espesor/longitud disminuye, se plantea la energía interna de deformación,

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^L \beta_{1,1}^2 dz^1 + \frac{GAk}{2} \int_0^L (w_{,1} - \beta_1)^2 dz^1 \quad (\text{B.15})$$

donde E, G representan el Módulo de Elasticidad Longitudinal y de Rigidez a Corte del material, respectivamente, mientras que I es el Momento de Inercia respecto del eje z^2 de la sección transversal de área A . El coeficiente k es el factor de corrección por corte.

Dividiendo (B.15) por $(EI/2)$,

$$\frac{2U}{EI} = \int_0^L \beta_{1,1}^2 dz^1 + \alpha \int_0^L (w_{,1} - \beta_1)^2 dz^1 \quad (\text{B.16})$$

El factor $\alpha = (G A k/EI)$ puede ser interpretado como un parámetro penalizador, donde $\alpha \rightarrow \infty$ cuando $h \rightarrow 0$. Conforme la magnitud de α crece, la rigidez a corte se vuelve dominante, pudiéndose despreciar la rigidez a flexión. Entonces, la solución por elementos finitos resulta inversamente proporcional a este factor α . A medida que el elemento es más delgado, dicho factor crece rápidamente y las deformaciones tienden a anularse, produciéndose el bloqueo de la solución debido al efecto de la rigidez a corte. Este fenómeno es una particularidad de cada elemento, no de la estructura que se analiza.

Finalmente, vale destacar que si bien el ejemplo presentado sirve para ilustrar el problema numérico de bloqueo, su tratamiento en problemas de placas y cáscaras es mucho más engorroso, conduciendo a una solución mucho más compleja.

APÉNDICE C: Derivación de la interpolación del corte transversal

Se considera el elemento de cáscara ("shell element") de 4 nodos de la [Figura C.1](#). Usando elementos finitos isoparamétricos, las coordenadas cartesianas antes de la deformación se definen como,

$${}^o\mathbf{z}(r, s, t) = \sum_{k=1}^4 N_k {}^o\mathbf{z}_k - \frac{t}{2} \sum_{k=1}^4 N_k [h {}^o\mathbf{V}_n]_k \quad (\text{C.1})$$

donde N_k son las funciones de interpolación dadas en (4.32), ${}^o\mathbf{z}_k$ las coordenadas cartesianas nodales, h^k el espesor de la cáscara en la dirección t del nodo k , y ${}^o\mathbf{V}_n$ el vector director (que no necesariamente es normal a la superficie media). El superíndice a izquierda refiere a la configuración del elemento ("o" para la configuración inicial, mientras que "t" para el estado final). La expresión (C.1) describe un elemento de cáscara con espesor variable.

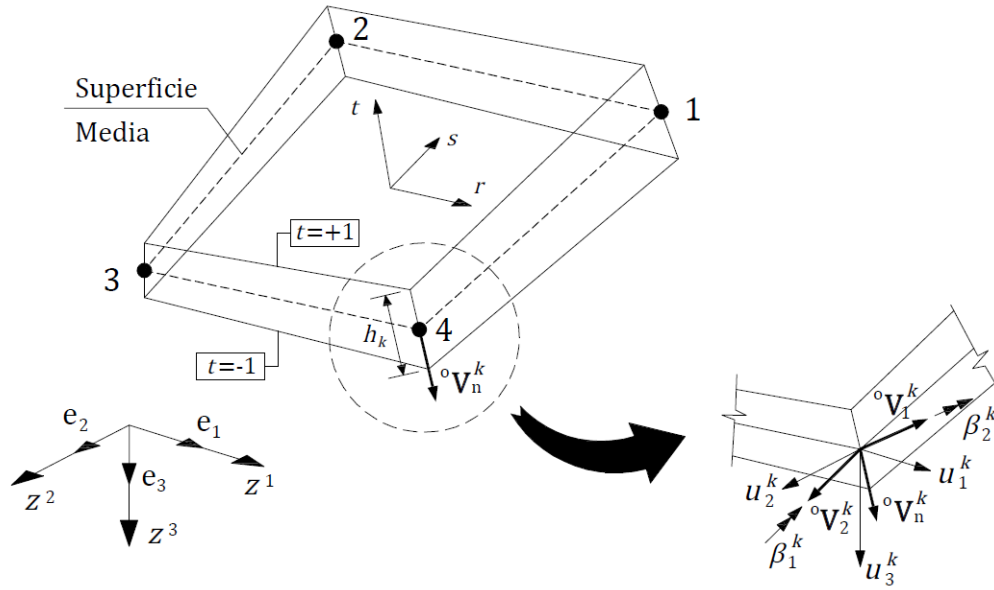


Figura C.1: Elemento de cáscara de 4 nodos.

Los desplazamientos de un punto en función de las coordenadas naturales están dados por,

$$\mathbf{u}(r, s, t) = \sum_{k=1}^4 N_k \mathbf{u}^k - \frac{t}{2} \sum_{k=1}^4 N_k [h (-\beta_1 {}^o\mathbf{V}_1 - \beta_2 {}^o\mathbf{V}_2)]_k \quad (\text{C.2})$$

donde ${}^o\mathbf{u}^k$ son los desplazamientos nodales en la superficie de referencia, mientras que $(\beta_1, \beta_2)_k$ son las rotaciones del vector director ${}^o\mathbf{V}_n^k$ alrededor de los vectores ${}^o\mathbf{V}_2^k$ y ${}^o\mathbf{V}_1^k$, definidos como,

$${}^o\mathbf{V}_1^k = \frac{\mathbf{e}_2 \times {}^o\mathbf{V}_n^k}{\|\mathbf{e}_2 \times {}^o\mathbf{V}_n^k\|_2} \quad (\text{C.3})$$

$${}^o\mathbf{V}_2^k = {}^o\mathbf{V}_n^k \times {}^o\mathbf{V}_1^k$$

siendo $\|\cdot\|_2$ la norma euclídea. El operador " \times " denota el producto vectorial.

La posición de un punto después de la deformación queda definida como,

$${}^t\mathbf{z}(r, s, t) = {}^o\mathbf{z}(r, s, t) + \mathbf{u}(r, s, t) \quad (\text{C.4})$$

Incorporando (C.1) y (C.2) en (C.4),

$${}^t\mathbf{z}(r, s, t) = \sum_{k=1}^4 \left\{ N_k {}^o\mathbf{z}_k - \frac{t}{2} N_k [h {}^o\mathbf{V}_n]_k + N_k \mathbf{u}^k - \frac{t}{2} N_k [h (-\beta_1 {}^o\mathbf{V}_1 - \beta_2 {}^o\mathbf{V}_2)]_k \right\} \quad (C.5)$$

En el sistema de coordenadas natural del elemento, los vectores base covariantes se definen como (ver, p.ej., *Dvorkin y Goldschmit, 2005*),

$$\mathbf{g}_r = \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial r} \quad \mathbf{g}_s = \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial s} \quad \mathbf{g}_t = \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t} \quad (C.6)$$

De este modo, para la configuración inicial se tiene,

$$\begin{aligned} {}^o\mathbf{g}_r &= \sum_{k=1}^4 N_{k,r} {}^o\mathbf{z}_k - \frac{t}{2} \sum_{k=1}^4 N_{k,r} [h {}^o\mathbf{V}_n]_k \\ {}^o\mathbf{g}_s &= \sum_{k=1}^4 N_{k,s} {}^o\mathbf{z}_k - \frac{t}{2} \sum_{k=1}^4 N_{k,s} [h {}^o\mathbf{V}_n]_k \\ {}^o\mathbf{g}_t &= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 N_k [h {}^o\mathbf{V}_n]_k \end{aligned} \quad (C.7)$$

mientras que para la configuración deformada,

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{g}_r &= \sum_{k=1}^4 \left\{ N_{k,r} {}^o\mathbf{z}_k - \frac{t}{2} N_{k,r} [h {}^o\mathbf{V}_n]_k + N_{k,r} \mathbf{u}^k - \frac{t}{2} N_{k,r} [h (-\beta_1 {}^o\mathbf{V}_1 - \beta_2 {}^o\mathbf{V}_2)]_k \right\} \\ {}^t\mathbf{g}_s &= \sum_{k=1}^4 \left\{ N_{k,s} {}^o\mathbf{z}_k - \frac{t}{2} N_{k,s} [h {}^o\mathbf{V}_n]_k + N_{k,s} \mathbf{u}^k - \frac{t}{2} N_{k,s} [h (-\beta_1 {}^o\mathbf{V}_1 - \beta_2 {}^o\mathbf{V}_2)]_k \right\} \\ {}^t\mathbf{g}_t &= \sum_{k=1}^4 \left\{ -\frac{1}{2} N_k [h {}^o\mathbf{V}_n]_k - \frac{1}{2} N_k [h (-\beta_1 {}^o\mathbf{V}_1 - \beta_2 {}^o\mathbf{V}_2)]_k \right\} \end{aligned} \quad (C.8)$$

Los vectores base contravariantes son definidos a partir de la siguiente expresión,

$$\mathbf{g}^\alpha \cdot \mathbf{g}_\gamma = \delta^{\alpha}_{\gamma} \quad (C.9)$$

donde δ^{α}_{γ} son las componentes mixtas de la Delta de Kronecker, y α, γ varían sobre (r, s, t) .

Además, las siguientes relaciones se mantienen,

$$g_{\alpha\gamma} = \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\gamma \quad (C.10)$$

$$\mathbf{g}^\alpha = g^{\alpha\gamma} \mathbf{g}_\gamma \quad (C.11)$$

en donde $g_{\alpha\gamma}$ y $g^{\alpha\gamma}$ son, respectivamente, las componentes covariantes y contravariantes del tensor métrico.

El tensor de deformación de Green-Lagrange puede ser expresado en el sistema coordenado natural empleando componentes covariantes y vectores base contravariantes,

$${}^t\mathbf{\underline{\underline{\epsilon}}} = \tilde{\epsilon}_{\alpha\gamma} {}^o\mathbf{g}^\alpha {}^o\mathbf{g}^\gamma \quad (C.12)$$

donde la virgulilla (\sim) indica que las cantidades son medidas en el sistema de coordenadas natural y,

$$\tilde{\epsilon}_{\alpha\gamma} = \frac{1}{2} \left({}^t\mathbf{g}_\alpha \cdot {}^t\mathbf{g}_\gamma - {}^o\mathbf{g}_\alpha \cdot {}^o\mathbf{g}_\gamma \right) \quad (C.13)$$

Reteniendo sólo los términos lineales, las componentes asociadas al corte transversal son (*Bathe, 1996*),

$$\tilde{\epsilon}_{rt} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \cdot {}^o\mathbf{g}_t + {}^o\mathbf{g}_r \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) \quad (C.14)$$

$$\tilde{\epsilon}_{st} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s} \cdot {}^o\mathbf{g}_t + {}^o\mathbf{g}_s \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) \quad (C.15)$$

Particularizando para un elemento de placa plano (${}^o\mathbf{V}_n = \mathbf{e}_3$; ${}^o\mathbf{V}_1 = \mathbf{e}_1$; ${}^o\mathbf{V}_2 = \mathbf{e}_2$) de espesor constante h , se tiene para la expresión (C.7),

$$\begin{aligned} {}^o\mathbf{g}_r &= \sum_{k=1}^4 N_{k,r} {}^o\mathbf{z}_k \\ {}^o\mathbf{g}_s &= \sum_{k=1}^4 N_{k,s} {}^o\mathbf{z}_k \\ {}^o\mathbf{g}_t &= -\frac{1}{2} h {}^o\mathbf{V}_n \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Reemplazando (C.16) en (C.14) y (C.15),

$$\tilde{\varepsilon}_{rt} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 \left(-\frac{h}{2} N_{k,r} u_3^k + \frac{h}{2} N_k \beta_1^k N_{l,r} {}^o z_l^1 + \frac{h}{2} N_k \beta_2^k N_{l,r} {}^o z_l^2 \right) \quad (\text{C.17})$$

$$\tilde{\varepsilon}_{st} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 \left(-\frac{h}{2} N_{k,s} u_3^k + \frac{h}{2} N_k \beta_1^k N_{l,s} {}^o z_l^1 + \frac{h}{2} N_k \beta_2^k N_{l,s} {}^o z_l^2 \right) \quad (\text{C.18})$$

Se plantea la siguiente interpolación para las componentes tensoriales asociadas al corte transversal (Dvorkin & Bathe, 1985),

$$2\tilde{\varepsilon}_{rt} = (1+s) \tilde{\varepsilon}_{rt}^A + (1-s) \tilde{\varepsilon}_{rt}^C \quad (\text{C.19})$$

$$2\tilde{\varepsilon}_{st} = (1+r) \tilde{\varepsilon}_{st}^B + (1-r) \tilde{\varepsilon}_{st}^D \quad (\text{C.20})$$

donde ($\tilde{\varepsilon}_{rt}^A, \tilde{\varepsilon}_{st}^B, \tilde{\varepsilon}_{st}^C, \tilde{\varepsilon}_{rt}^D$) son las componentes del tensor de deformaciones infinitesimales evaluadas en los puntos A, B, C y D (denominados "puntos de muestreo") a partir de la interpolación de desplazamientos (4.26)-(4.28) (ver Figura C.2),

$$\tilde{\varepsilon}_{rt}^A = -\frac{h}{8} \left[(u_3^1 - u_3^2) - \frac{{}^o z_1^1 - {}^o z_2^1}{2} (\beta_1^1 + \beta_1^2) - \frac{{}^o z_1^2 - {}^o z_2^2}{2} (\beta_2^1 + \beta_2^2) \right] \quad (\text{C.21})$$

$$\tilde{\varepsilon}_{st}^B = -\frac{h}{8} \left[(u_3^2 - u_3^3) - \frac{{}^o z_2^1 - {}^o z_3^1}{2} (\beta_1^2 + \beta_1^3) - \frac{{}^o z_2^2 - {}^o z_3^2}{2} (\beta_2^2 + \beta_2^3) \right] \quad (\text{C.22})$$

$$\tilde{\varepsilon}_{rt}^C = -\frac{h}{8} \left[(u_3^4 - u_3^3) - \frac{{}^o z_4^1 - {}^o z_3^1}{2} (\beta_1^4 + \beta_1^3) - \frac{{}^o z_4^2 - {}^o z_3^2}{2} (\beta_2^4 + \beta_2^3) \right] \quad (\text{C.23})$$

$$\tilde{\varepsilon}_{st}^D = -\frac{h}{8} \left[(u_3^1 - u_3^4) - \frac{{}^o z_1^1 - {}^o z_4^1}{2} (\beta_1^1 + \beta_1^4) - \frac{{}^o z_1^2 - {}^o z_4^2}{2} (\beta_2^1 + \beta_2^4) \right] \quad (\text{C.24})$$

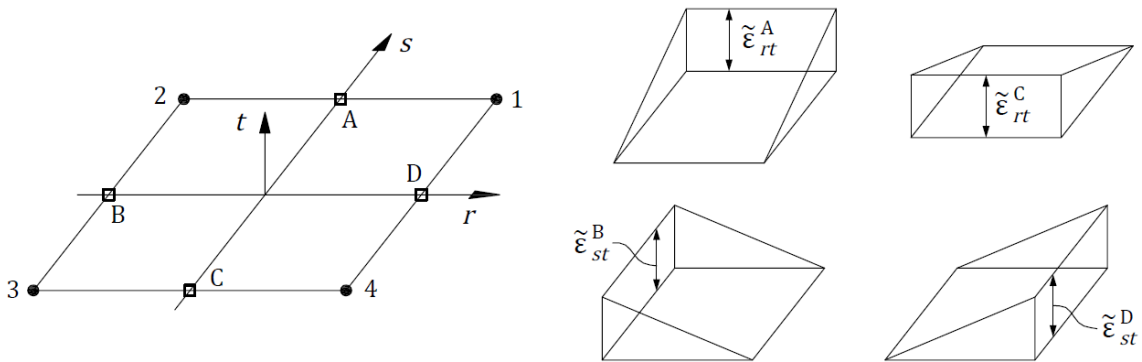


Figura C.2: Interpolación de la deformación transversal por corte.

A los efectos de expresar las componentes interpoladas en el sistema de coordenadas cartesianas, se aplica la siguiente regla de transformación,

$$\tilde{\varepsilon}_{\alpha\gamma} {}^o\mathbf{g}^\alpha {}^o\mathbf{g}^\gamma = \varepsilon_{\mu\theta} \mathbf{e}^\mu \mathbf{e}^\theta \quad (\text{C.25})$$

De este modo,

$$2\varepsilon_{13} = 2\tilde{\varepsilon}_{rt} \left({}^o\mathbf{g}^r \cdot \mathbf{e}_1 \right) \left({}^o\mathbf{g}^t \cdot \mathbf{e}_3 \right) + 2\tilde{\varepsilon}_{st} \left({}^o\mathbf{g}^s \cdot \mathbf{e}_1 \right) \left({}^o\mathbf{g}^t \cdot \mathbf{e}_3 \right) \quad (\text{C.26})$$

$$2\varepsilon_{23} = 2\tilde{\varepsilon}_{rt} \left({}^o\mathbf{g}^r \cdot \mathbf{e}_2 \right) \left({}^o\mathbf{g}^t \cdot \mathbf{e}_3 \right) + 2\tilde{\varepsilon}_{st} \left({}^o\mathbf{g}^s \cdot \mathbf{e}_2 \right) \left({}^o\mathbf{g}^t \cdot \mathbf{e}_3 \right) \quad (\text{C.27})$$

con los vectores base contravariantes $\left({}^o\mathbf{g}^r, {}^o\mathbf{g}^s, {}^o\mathbf{g}^t \right)$ definidos según (C.11), siendo las componentes contravariantes del tensor métrico ${}^o g^{\alpha\gamma}$,

$${}^o g^{rr} = \frac{(C_1+r B_1)^2+(C_2+r B_2)^2}{16 \det(\mathbf{J})^2} \quad (\text{C.28})$$

$${}^o g^{ss} = \frac{(A_1+s B_1)^2+(A_2+s B_2)^2}{16 \det(\mathbf{J})^2} \quad (\text{C.29})$$

$${}^o g^{rs} = \frac{(C_1+r B_1)(A_1+s B_1)+(C_2+r B_2)(A_2+s B_2)}{16 \det(\mathbf{J})^2} \quad ({}^o g^{rs} = {}^o g^{sr}) \quad (\text{C.30})$$

donde A_1, B_1, C_1, A_2, B_2 y C_2 son definidos en (4.41), y,

$${}^o g^{tt} = \frac{4}{h^2} \quad (\text{C.31})$$

Después de algo de algebra, finalmente se obtiene,

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{13} = & \frac{C_2+r B_2}{8 \det(\mathbf{J})} \left\{ (1+s) \left[\frac{u_3^1-u_3^2}{2} - \frac{{}^o z_1^1-{}^o z_2^1}{4} (\beta_1^1 + \beta_1^2) - \frac{{}^o z_1^2-{}^o z_2^2}{4} (\beta_2^1 + \beta_2^2) \right] + \right. \\ & \left. + (1-s) \left[\frac{u_3^4-u_3^3}{2} - \frac{{}^o z_4^1-{}^o z_3^1}{4} (\beta_1^4 + \beta_1^3) - \frac{{}^o z_4^2-{}^o z_3^2}{4} (\beta_2^4 + \beta_2^3) \right] \right\} + \\ & - \frac{A_2+s B_2}{8 \det(\mathbf{J})} \left\{ (1+r) \left[\frac{u_3^1-u_3^4}{2} - \frac{{}^o z_1^1-{}^o z_4^1}{4} (\beta_1^1 + \beta_1^4) - \frac{{}^o z_1^2-{}^o z_4^2}{4} (\beta_2^1 + \beta_2^4) \right] + \right. \\ & \left. + (1-r) \left[\frac{u_3^2-u_3^3}{2} - \frac{{}^o z_2^1-{}^o z_3^1}{4} (\beta_1^2 + \beta_1^3) - \frac{{}^o z_2^2-{}^o z_3^2}{4} (\beta_2^2 + \beta_2^3) \right] \right\} \quad (\text{C.32}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{23} = & - \frac{C_1+r B_1}{8 \det(\mathbf{J})} \left\{ (1+s) \left[\frac{u_3^1-u_3^2}{2} - \frac{{}^o z_1^1-{}^o z_2^1}{4} (\beta_1^1 + \beta_1^2) - \frac{{}^o z_1^2-{}^o z_2^2}{4} (\beta_2^1 + \beta_2^2) \right] + \right. \\ & \left. + (1-s) \left[\frac{u_3^4-u_3^3}{2} - \frac{{}^o z_4^1-{}^o z_3^1}{4} (\beta_1^4 + \beta_1^3) - \frac{{}^o z_4^2-{}^o z_3^2}{4} (\beta_2^4 + \beta_2^3) \right] \right\} + \\ & + \frac{A_1+s B_1}{8 \det(\mathbf{J})} \left\{ (1+r) \left[\frac{u_3^1-u_3^4}{2} - \frac{{}^o z_1^1-{}^o z_4^1}{4} (\beta_1^1 + \beta_1^4) - \frac{{}^o z_1^2-{}^o z_4^2}{4} (\beta_2^1 + \beta_2^4) \right] + \right. \\ & \left. + (1-r) \left[\frac{u_3^2-u_3^3}{2} - \frac{{}^o z_2^1-{}^o z_3^1}{4} (\beta_1^2 + \beta_1^3) - \frac{{}^o z_2^2-{}^o z_3^2}{4} (\beta_2^2 + \beta_2^3) \right] \right\} \quad (\text{C.33}) \end{aligned}$$

APÉNDICE D: Matrices del modelo de elementos finitos

En esta sección son desarrolladas las matrices del modelo a nivel elemento. Por simplificación de la notación, los índices que refieren a la capa o al elemento son omitidos ocasionalmente.

Incorporando (4.32) en las expresiones (4.26)-(4.30), las variables dependientes son aproximadas dentro del elemento en términos de sus valores nodales como,

$$\underline{\mathbf{u}}_o = \underline{\mathbf{N}}_u \cdot \hat{\underline{\mathbf{u}}}_o \quad (\text{D.1})$$

$$w = \underline{\mathbf{N}}_w \cdot \hat{\underline{\mathbf{w}}} \quad (\text{D.2})$$

$$\underline{\boldsymbol{\beta}} = \underline{\mathbf{N}}_\beta \cdot \hat{\underline{\boldsymbol{\beta}}} \quad (\text{D.3})$$

$$\underline{\boldsymbol{\lambda}} = \underline{\mathbf{N}}_\lambda \cdot \hat{\underline{\boldsymbol{\lambda}}} \quad (\text{D.4})$$

$$\lambda_3 = \underline{\mathbf{N}}_\mu \cdot \hat{\underline{\boldsymbol{\lambda}}}_3 \quad (\text{D.5})$$

donde,

$$\underline{\mathbf{u}}_o = [u_{o1} \quad u_{o2}]^T \quad (\text{D.6})$$

$$\underline{\boldsymbol{\beta}} = [\beta_1 \quad \beta_2]^T \quad (\text{D.7})$$

$$\underline{\boldsymbol{\lambda}} = [\lambda_1 \quad \lambda_2]^T \quad (\text{D.8})$$

$$\underline{\mathbf{N}}_u = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \quad (\text{D.9})$$

$$\underline{\mathbf{N}}_w = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \quad (\text{D.10})$$

$$\underline{\mathbf{N}}_\beta = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \quad (\text{D.11})$$

$$\underline{\mathbf{N}}_\lambda = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \quad (\text{D.12})$$

$$\underline{\mathbf{N}}_\mu = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \quad (\text{D.13})$$

$$\hat{\underline{\mathbf{u}}}_o = [\hat{u}_{o1}^1 \quad \hat{u}_{o1}^2 \quad \hat{u}_{o1}^3 \quad \hat{u}_{o1}^4 \quad \hat{u}_{o2}^1 \quad \hat{u}_{o2}^2 \quad \hat{u}_{o2}^3 \quad \hat{u}_{o2}^4]^T \quad (\text{D.14})$$

$$\hat{\underline{\mathbf{w}}} = [\hat{w}^1 \quad \hat{w}^2 \quad \hat{w}^3 \quad \hat{w}^4]^T \quad (\text{D.15})$$

$$\hat{\underline{\boldsymbol{\beta}}} = [\hat{\beta}_1^1 \quad \hat{\beta}_1^2 \quad \hat{\beta}_1^3 \quad \hat{\beta}_1^4 \quad \hat{\beta}_2^1 \quad \hat{\beta}_2^2 \quad \hat{\beta}_2^3 \quad \hat{\beta}_2^4]^T \quad (\text{D.16})$$

$$\hat{\underline{\boldsymbol{\lambda}}} = [\hat{\lambda}_1^1 \quad \hat{\lambda}_1^2 \quad \hat{\lambda}_1^3 \quad \hat{\lambda}_1^4 \quad \hat{\lambda}_2^1 \quad \hat{\lambda}_2^2 \quad \hat{\lambda}_2^3 \quad \hat{\lambda}_2^4]^T \quad (\text{D.17})$$

$$\hat{\underline{\boldsymbol{\lambda}}}_3 = [\hat{\lambda}_3^1 \quad \hat{\lambda}_3^2 \quad \hat{\lambda}_3^3 \quad \hat{\lambda}_3^4]^T \quad (\text{D.18})$$

Siguiendo la relación (3.21), las deformaciones en el plano $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}]^T$ tienen la forma,

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \underline{\mathbf{B}} \cdot (\hat{\underline{\mathbf{u}}}_o + z^3 \hat{\underline{\boldsymbol{\beta}}}) \quad (\text{D.19})$$

con la matriz de interpolación desplazamientos-deformaciones definida como,

$$\underline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} N_{1,1} & N_{2,1} & N_{3,1} & N_{4,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{1,2} & N_{2,2} & N_{3,2} & N_{4,2} \\ N_{1,2} & N_{2,2} & N_{3,2} & N_{4,2} & N_{1,1} & N_{2,1} & N_{3,1} & N_{4,1} \end{bmatrix} \quad (\text{D.20})$$

Las derivadas de las funciones de forma respecto de las coordenadas del problema son llevadas a cabo aplicando la Regla de la Cadena, como se detalla en (4.35)-(4.37).

Por otra parte, la deformación de corte transversal $\underline{\varepsilon}_t = [2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{23}]^T$ (4.39)-(4.40) se puede expresar como,

$$\underline{\varepsilon}_t = \underline{\mathbf{N}}_J \cdot \underline{\mathbf{N}}_N \cdot \left(\underline{\mathbf{N}}_{\gamma-w} \cdot \underline{\hat{\mathbf{w}}} + \underline{\mathbf{N}}_{\gamma-\beta} \cdot \underline{\hat{\boldsymbol{\beta}}} \right) \quad (\text{D.21})$$

en donde,

$$\underline{\mathbf{N}}_J = \frac{1}{8 \det(\underline{\mathbf{J}})} \begin{bmatrix} C_2 + rB_2 & -(A_2 + sB_2) \\ -(C_1 + rB_1) & A_1 + sB_1 \end{bmatrix} \quad (\text{D.22})$$

$$\underline{\mathbf{N}}_N = \begin{bmatrix} (1+s) & 0 & (1-s) & 0 \\ 0 & (1-r) & 0 & (1+r) \end{bmatrix} \quad (\text{D.23})$$

$$\underline{\mathbf{N}}_{\gamma-w} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{D.24})$$

$$\underline{\mathbf{N}}_{\gamma-\beta} = \begin{bmatrix} -\frac{z_1^1 - z_1^2}{4} & -\frac{z_1^1 - z_1^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{z_1^2 - z_1^3}{4} & -\frac{z_1^2 - z_1^3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{z_1^4 - z_1^3}{4} & -\frac{z_1^4 - z_1^3}{4} \\ -\frac{z_1^1 - z_1^4}{4} & 0 & 0 & -\frac{z_1^1 - z_1^4}{4} \\ -\frac{z_2^1 - z_2^2}{4} & -\frac{z_2^1 - z_2^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{z_2^2 - z_2^3}{4} & -\frac{z_2^2 - z_2^3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{z_2^4 - z_2^3}{4} & -\frac{z_2^4 - z_2^3}{4} \\ -\frac{z_2^1 - z_2^4}{4} & 0 & 0 & -\frac{z_2^1 - z_2^4}{4} \end{bmatrix} \quad (\text{D.25})$$

La relación Constitutiva (3.54), se reformula como

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{N}} &= h \underline{\mathbf{C}}_p \cdot \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\hat{\mathbf{u}}}_o \\ \underline{\mathbf{M}} &= -\frac{h^3}{12} \underline{\mathbf{C}}_p \cdot \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\hat{\boldsymbol{\beta}}} \\ \underline{\mathbf{Q}} &= h \underline{\mathbf{C}}_t \cdot \underline{\mathbf{N}}_J \cdot \underline{\mathbf{N}}_N \cdot \left(\underline{\mathbf{N}}_{\gamma-w} \cdot \underline{\hat{\mathbf{w}}} + \underline{\mathbf{N}}_{\gamma-\beta} \cdot \underline{\hat{\boldsymbol{\beta}}} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.26})$$

donde las matrices Constitutivas referidas al sistema de coordenadas del problema son,

$$\underline{\mathbf{C}}_p = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1112} \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2212} \\ C_{1112} & C_{2212} & C_{1212} \end{bmatrix} ; \quad \underline{\mathbf{C}}_t = \begin{bmatrix} C_{1313} & C_{1323} \\ C_{1323} & C_{2323} \end{bmatrix} \quad (\text{D.27})$$

$$\underline{\mathbf{0}} = \delta \hat{\underline{\lambda}}^{(j)T} \cdot \int_{\Omega_e} \left[\underline{\mathbf{N}}_\lambda^T \cdot \underline{\mathbf{N}}_u \cdot \hat{\underline{\mathbf{u}}}^{(j)} + \frac{h_j}{2} \underline{\mathbf{N}}_\lambda^T \cdot \underline{\mathbf{N}}_\beta \cdot \hat{\underline{\mathbf{B}}}^{(j)} + \right. \\ \left. - \underline{\mathbf{N}}_\lambda^T \cdot \underline{\mathbf{N}}_u \cdot \hat{\underline{\mathbf{u}}}^{(j-1)} + \frac{h_{j-1}}{2} \underline{\mathbf{N}}_\lambda^T \cdot \underline{\mathbf{N}}_\beta \cdot \hat{\underline{\mathbf{B}}}^{(j-1)} \right] d\Omega \quad (\text{D.37})$$

$$\underline{\mathbf{0}} = \delta \hat{\underline{\lambda}}_3^{(j)T} \cdot \int_{\Omega_e} \left[\underline{\mathbf{N}}_\mu^T \cdot \underline{\mathbf{N}}_w \cdot \hat{\underline{\mathbf{w}}}^{(j)} - \underline{\mathbf{N}}_\mu^T \cdot \underline{\mathbf{N}}_w \cdot \hat{\underline{\mathbf{w}}}^{(j-1)} \right] d\Omega \quad (\text{D.38})$$

$j = 2, \dots, n$

La siguiente relación es aplicada (ver, p.ej., [Reddy, 2006](#))

$$\int_{\Omega_e} (\cdot) d\Omega = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (\cdot) \det(\underline{\mathbf{J}}) dr ds \quad (\text{D.39})$$

Estableciendo las definiciones,

$$\underline{\mathbf{A}}_m^{(i)} = h_i \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \underline{\mathbf{B}}^T \cdot \underline{\mathbf{C}}_p^{(i)} \cdot \underline{\mathbf{B}} \det(\underline{\mathbf{J}}) dr ds \quad (\text{D.40})$$

$$\underline{\mathbf{A}}_b^{(i)} = \frac{h_i^3}{12} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \underline{\mathbf{B}}^T \cdot \underline{\mathbf{C}}_p^{(i)} \cdot \underline{\mathbf{B}} \det(\underline{\mathbf{J}}) dr ds \quad (\text{D.41})$$

$$\underline{\mathbf{E}}^{(i)} = h_i \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \underline{\mathbf{N}}_{\gamma\beta}^T \cdot \underline{\mathbf{N}}_N^T \cdot \underline{\mathbf{N}}_J^T \cdot \underline{\mathbf{C}}_t^{(i)} \cdot \underline{\mathbf{N}}_J \cdot \underline{\mathbf{N}}_N \cdot \underline{\mathbf{N}}_{\gamma w} \det(\underline{\mathbf{J}}) dr ds \quad (\text{D.42})$$

$$\underline{\mathbf{D}}^{(i)} = h_i \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \underline{\mathbf{N}}_{\gamma\beta}^T \cdot \underline{\mathbf{N}}_N^T \cdot \underline{\mathbf{N}}_J^T \cdot \underline{\mathbf{C}}_t^{(i)} \cdot \underline{\mathbf{N}}_J \cdot \underline{\mathbf{N}}_N \cdot \underline{\mathbf{N}}_{\gamma\beta} \det(\underline{\mathbf{J}}) dr ds \quad (\text{D.43})$$

$$\underline{\mathbf{G}}^{(i)} = h_i \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \underline{\mathbf{N}}_{\gamma w}^T \cdot \underline{\mathbf{N}}_N^T \cdot \underline{\mathbf{N}}_J^T \cdot \underline{\mathbf{C}}_t^{(i)} \cdot \underline{\mathbf{N}}_J \cdot \underline{\mathbf{N}}_N \cdot \underline{\mathbf{N}}_{\gamma w} \det(\underline{\mathbf{J}}) dr ds \quad (\text{D.44})$$

$$\underline{\mathbf{H}}_p = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \underline{\mathbf{N}}_u^T \cdot \underline{\mathbf{N}}_\lambda \det(\underline{\mathbf{J}}) dr ds \quad (\text{D.45})$$

$$\underline{\mathbf{H}}_t = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \underline{\mathbf{N}}_w^T \cdot \underline{\mathbf{N}}_\mu \det(\underline{\mathbf{J}}) dr ds \quad (\text{D.46})$$

$$\underline{\mathbf{H}}_r^{(i)} = \frac{h_i}{2} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \underline{\mathbf{N}}_\beta^T \cdot \underline{\mathbf{N}}_\lambda \det(\underline{\mathbf{J}}) dr ds \quad (\text{D.47})$$

$$\underline{\mathbf{M}}_p^{(i)} = \rho_i h_i \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \underline{\mathbf{N}}_u^T \cdot \underline{\mathbf{N}}_u \det(\underline{\mathbf{J}}) dr ds \quad (\text{D.48})$$

$$\underline{\mathbf{M}}_t^{(i)} = \rho_i h_i \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \underline{\mathbf{N}}_w^T \cdot \underline{\mathbf{N}}_w \det(\underline{\mathbf{J}}) dr ds \quad (\text{D.49})$$

$$\underline{\mathbf{M}}_r^{(i)} = \rho_i \frac{h_i^3}{12} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \underline{\mathbf{N}}_\beta^T \cdot \underline{\mathbf{N}}_\beta \det(\underline{\mathbf{J}}) dr ds \quad (\text{D.50})$$

$$\underline{\mathbf{F}}^{(1)} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \underline{\mathbf{N}}_w^T \cdot q \det(\underline{\mathbf{J}}) dr ds \quad (\text{D.51})$$

se obtienen finalmente las expresiones (4.42)-(4.52), donde la evaluación numérica de las integrales es llevada a cabo mediante el método de cuadratura de Gauss (ver, p.ej., [Burden & Faires, 2011](#)),

$$\underline{\mathbf{A}}_m^{(i)} = h_i \sum_{q=1}^{NG} \sum_{p=1}^{NG} \left\{ \underline{\mathbf{B}}^T \cdot \underline{\mathbf{C}}_p^{(i)} \cdot \underline{\mathbf{B}} \det(\underline{\mathbf{J}}) \right\} \alpha_p \alpha_q \quad (\text{D.52})$$

$$\underline{\mathbf{A}}_b^{(i)} = \frac{h_i^3}{12} \sum_{q=1}^{NG} \sum_{p=1}^{NG} \left\{ \underline{\mathbf{B}}^T \cdot \underline{\mathbf{C}}_p^{(i)} \cdot \underline{\mathbf{B}} \det(\underline{\mathbf{J}}) \right\} \alpha_p \alpha_q \quad (\text{D.53})$$

$$\underline{\mathbf{E}}^{(i)} = h_i \sum_{q=1}^{NG} \sum_{p=1}^{NG} \left\{ \underline{\mathbf{N}}_{\gamma\beta}^T \cdot \underline{\mathbf{N}}_N^T \cdot \underline{\mathbf{N}}_J^T \cdot \underline{\mathbf{C}}_t^{(i)} \cdot \underline{\mathbf{N}}_J \cdot \underline{\mathbf{N}}_N \cdot \underline{\mathbf{N}}_{\gamma w} \det(\underline{\mathbf{J}}) \right\} \alpha_p \alpha_q \quad (\text{D.54})$$

$$\underline{\mathbf{D}}^{(i)} = h_i \sum_{q=1}^{NG} \sum_{p=1}^{NG} \left\{ \underline{\mathbf{N}}_{\gamma\beta}^T \cdot \underline{\mathbf{N}}_N^T \cdot \underline{\mathbf{N}}_J^T \cdot \underline{\mathbf{C}}_t^{(i)} \cdot \underline{\mathbf{N}}_J \cdot \underline{\mathbf{N}}_N \cdot \underline{\mathbf{N}}_{\gamma\beta} \det(\underline{\mathbf{J}}) \right\} \alpha_p \alpha_q \quad (\text{D.55})$$

$$\underline{\mathbf{G}}^{(i)} = h_i \sum_{q=1}^{NG} \sum_{p=1}^{NG} \left\{ \underline{\mathbf{N}}_{\gamma,w}^T \cdot \underline{\mathbf{N}}_N^T \cdot \underline{\mathbf{N}}_J^T \cdot \underline{\mathbf{C}}_t^{(i)} \cdot \underline{\mathbf{N}}_J \cdot \underline{\mathbf{N}}_N \cdot \underline{\mathbf{N}}_{\gamma,w} \det(\underline{\mathbf{J}}) \right\} \alpha_p \alpha_q \quad (\text{D.56})$$

$$\underline{\mathbf{H}}_p = \sum_{q=1}^{NG} \sum_{p=1}^{NG} \left\{ \underline{\mathbf{N}}_u^T \cdot \underline{\mathbf{N}}_\lambda \det(\underline{\mathbf{J}}) \right\} \alpha_p \alpha_q \quad (\text{D.57})$$

$$\underline{\mathbf{H}}_t = \sum_{q=1}^{NG} \sum_{p=1}^{NG} \left\{ \underline{\mathbf{N}}_w^T \cdot \underline{\mathbf{N}}_\mu \det(\underline{\mathbf{J}}) \right\} \alpha_p \alpha_q \quad (\text{D.58})$$

$$\underline{\mathbf{H}}_r^{(i)} = \frac{h_i}{2} \sum_{q=1}^{NG} \sum_{p=1}^{NG} \left\{ \underline{\mathbf{N}}_\beta^T \cdot \underline{\mathbf{N}}_\lambda \det(\underline{\mathbf{J}}) \right\} \alpha_p \alpha_q \quad (\text{D.59})$$

$$\underline{\mathbf{M}}_p^{(i)} = \rho_i h_i \sum_{q=1}^{NG} \sum_{p=1}^{NG} \left\{ \underline{\mathbf{N}}_u^T \cdot \underline{\mathbf{N}}_u \det(\underline{\mathbf{J}}) \right\} \alpha_p \alpha_q \quad (\text{D.60})$$

$$\underline{\mathbf{M}}_t^{(i)} = \rho_i h_i \sum_{q=1}^{NG} \sum_{p=1}^{NG} \left\{ \underline{\mathbf{N}}_w^T \cdot \underline{\mathbf{N}}_w \det(\underline{\mathbf{J}}) \right\} \alpha_p \alpha_q \quad (\text{D.61})$$

$$\underline{\mathbf{M}}_r^{(i)} = \rho_i \frac{h_i^3}{12} \sum_{q=1}^{NG} \sum_{p=1}^{NG} \left\{ \underline{\mathbf{N}}_\beta^T \cdot \underline{\mathbf{N}}_\beta \det(\underline{\mathbf{J}}) \right\} \alpha_p \alpha_q \quad (\text{D.62})$$

$$\underline{\mathbf{F}}^{(1)} = \sum_{q=1}^{NG} \sum_{p=1}^{NG} \left\{ \underline{\mathbf{N}}_w^T \cdot q \det(\underline{\mathbf{J}}) \right\} \alpha_p \alpha_q \quad (\text{D.63})$$

donde NG representa la cantidad de puntos empleados en la cuadratura, mientras que α simboliza el peso asociado a dicho punto.

Para un sistema de 3 capas, la matriz de rigidez es expresada en la [Figura D.1](#).

$\underline{\mathbf{A}}_m^{(1)}$	$\underline{\mathbf{0}}$	$\underline{\mathbf{0}}$	$-\underline{\mathbf{H}}_p$	$\underline{\mathbf{0}}$					
$\underline{\mathbf{0}}$	$\underline{\mathbf{G}}^{(1)}$	$\underline{\mathbf{E}}^{(1)T}$	$\underline{\mathbf{0}}$	$-\underline{\mathbf{H}}_t$					
$\underline{\mathbf{0}}$	$\underline{\mathbf{E}}^{(1)}$	$\underline{\mathbf{A}}_b^{(1)} + \underline{\mathbf{D}}^{(1)}$	$\underline{\mathbf{H}}_r^{(1)}$	$\underline{\mathbf{0}}$					
$-\underline{\mathbf{H}}_p$	$\underline{\mathbf{0}}$	$\underline{\mathbf{H}}_r^{(1)}$	$\underline{\mathbf{0}}$	$\underline{\mathbf{0}}$	$\underline{\mathbf{H}}_p$	$\underline{\mathbf{0}}$	$\underline{\mathbf{H}}_r^{(2)}$		
$\underline{\mathbf{0}}$	$-\underline{\mathbf{H}}_t$	$\underline{\mathbf{0}}$	$\underline{\mathbf{0}}$	$\underline{\mathbf{0}}$	$\underline{\mathbf{0}}$	$\underline{\mathbf{H}}_t$	$\underline{\mathbf{0}}$		
			$\underline{\mathbf{H}}_p$	$\underline{\mathbf{0}}$	$\underline{\mathbf{A}}_m^{(2)}$	$\underline{\mathbf{0}}$	$\underline{\mathbf{0}}$	$-\underline{\mathbf{H}}_p$	$\underline{\mathbf{0}}$
			$\underline{\mathbf{0}}$	$\underline{\mathbf{H}}_t$	$\underline{\mathbf{0}}$	$\underline{\mathbf{G}}^{(2)}$	$\underline{\mathbf{E}}^{(2)T}$	$\underline{\mathbf{0}}$	$-\underline{\mathbf{H}}_t$
			$\underline{\mathbf{H}}_r^{(2)}$	$\underline{\mathbf{0}}$	$\underline{\mathbf{0}}$	$\underline{\mathbf{E}}^{(2)}$	$\underline{\mathbf{A}}_b^{(2)} + \underline{\mathbf{D}}^{(2)}$	$\underline{\mathbf{H}}_r^{(2)}$	$\underline{\mathbf{0}}$
					$-\underline{\mathbf{H}}_p$	$\underline{\mathbf{0}}$	$\underline{\mathbf{H}}_r^{(2)}$	$\underline{\mathbf{0}}$	$\underline{\mathbf{0}}$
					$\underline{\mathbf{0}}$	$-\underline{\mathbf{H}}_t$	$\underline{\mathbf{0}}$	$\underline{\mathbf{0}}$	$\underline{\mathbf{H}}_t$
						$\underline{\mathbf{H}}_p$	$\underline{\mathbf{0}}$	$\underline{\mathbf{A}}_m^{(3)}$	$\underline{\mathbf{0}}$
						$\underline{\mathbf{0}}$	$\underline{\mathbf{H}}_t$	$\underline{\mathbf{0}}$	$\underline{\mathbf{G}}^{(3)}$
						$\underline{\mathbf{H}}_r^{(3)}$	$\underline{\mathbf{0}}$	$\underline{\mathbf{0}}$	$\underline{\mathbf{E}}^{(3)T}$
						$\underline{\mathbf{0}}$	$\underline{\mathbf{E}}^{(3)}$	$\underline{\mathbf{A}}_b^{(3)} + \underline{\mathbf{D}}^{(3)}$	

Figura D.1: Matriz de rigidez. Modelo con tres capas numéricas.