

MATERIALES COMPUESTOS Y SU APLICACIÓN EN ESTRUCTURAS

**Roberto Sergio Carnicer
Ingeniero Civil
Buenos Aires**

Departamento de Estabilidad, Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires. Director del Área de Construcciones. Facultad de Ingeniería, Universidad de Belgrano. Cálculo de Estructuras (SAE), Jefe del Departamento de Cálculos Especiales y Modelización Numérica (ENACE), División de Cálculos Especiales para Componentes Nucleares (Siemens-Alemania) - Análisis Probabilístico de Estructuras (Cubiertas de Estadios – Portugal, Montreal; Puentes – Italia).

**Joaquín María Gutiérrez
Estudiante
Buenos Aires**

Departamento de Estabilidad, Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires

Cálculo y Diseño de Aparejos para Embarcaciones en Materiales Compuestos (King Composite)

Resumen

En el presente trabajo se realiza una descripción de los beneficios en la utilización de los materiales compuestos en las diversas áreas del diseño industrial. Entre ellos, podemos citar: elevadas rigideces y resistencias por unidad de peso, resistencia a la corrosión, resistencia a la fatiga, bajos coeficientes de dilatación y facilidad para conformar geometrías complejas. Como ejemplos de aplicación en los campos de arquitectura e ingeniería estructural se pueden citar: puentes, obenques de puentes, cubiertas, fachadas, refuerzo de estructuras, etc.

Además se plantea su modelización mediante el método de los elementos finitos y en particular su aplicación a las placas constituidas por laminados compuestos.

Se implementa un elemento basado en la Teoría Multicapa (*Layerwise*) y se comparan sus resultados con las soluciones analíticas para algunos casos particulares.

Finalmente, se evalúa la aplicabilidad del elemento implementado y se analizan los beneficios y desventajas inherentes al método empleado.

Abstract

The benefits in the application of composite materials to industrial design are described in the present work. The most remarkable benefits are: high stiffness and high strength to weight ratios, corrosion and fatigue resistance, low thermal expansion and exceptional formability into complex shapes. Some examples of the application of composite materials in the architectural and structural engineering fields are: bridges, cables for stayed bridges, roofs, facades, structural strengthening, etc.

The modeling of composite structures employing the finite element method is described. Specifically, the application of composite laminated plates is analyzed.

A finite element formulation is developed and results are compared with the available analytical solutions. The implemented element is based on a Layerwise theory. Finally, the applicability of the implemented element is assessed and the pros and cons inherent to the employed method are studied.

Notación

a, b	Dimensiones de la placa en el plano
h	Espesor de la placa
x, y, z	Coordenadas rectangulares
n, s, r	Coordenadas normal, tangencial y fuera del plano
u, v, w	Desplazamientos en las direcciones de las coordenadas x, y, z
j	Índice referente a la interfaz
k	Índice referente a la capa
N	Número de capas
q	Carga transversal distribuida
q_0	Carga transversal uniforme
U	Energía potencial elástica
V	Trabajo de las fuerzas exteriores
Γ	Borde o contorno del dominio
ξ, η	Coordenadas en el dominio del elemento
Ω	Dominio
θ	Orientación de la lámina
σ	Tensión normal
τ	Tensión tangencial
ε	Deformación específica
γ	Distorsión angular
δ	Variación
$[Q]$	Matriz de rigideces de la lámina
$[S]$	Matriz de flexibilidades de la lámina
$[T]$	Matriz de transformación

Introducción

El objetivo de este trabajo es hacer una breve reseña acerca de los materiales compuestos avanzados, qué características presentan, cuáles son sus posibles usos en estructuras, cómo se analizan, y plantear su modelización mediante el método de los elementos finitos, en particular en placas constituidas por laminados compuestos.

Un material compuesto, es aquel formado por dos o más materiales, que se combinan para obtener mejores propiedades que las que presenta individualmente cada uno de ellos. Habitualmente, se denominan materiales compuestos avanzados a los que están formados por una matriz polimérica y reforzados con fibras largas continuas. Este tipo de materiales se emplea apilando láminas, estando las fibras de cada lámina orientadas en alguna dirección particular ("laminados compuestos"). Presentan ciertos fenómenos que no se manifiestan en los materiales isótropos y homogéneos, como por ejemplo los distintos tipos de acoples y su alta deformabilidad ante esfuerzos de corte. Estos fenómenos hacen que el diseño y/o análisis de una estructura hecha a partir de materiales compuestos sea más dificultosa que para el caso de materiales isótropos y homogéneos.

El empleo de estos materiales empezó a crecer vertiginosamente a partir de los años 60'. En sus comienzos fueron utilizados fundamentalmente en la industria aeroespacial. Con el desarrollo de las técnicas de manufactura y reducción de los costos de la materia prima, la aplicación de los materiales compuestos se masificó y hoy en día están presentes en muchas industrias. Como por ejemplo: fabricación de turbinas eólicas, industria aeronáutica, industria naval, industria automotriz, bienes de consumo masivo (bicicletas, raquetas, etc.) y refuerzo de estructuras entre otros.

El beneficio comúnmente más conocido de estos materiales es el ahorro de peso. El ahorro de peso se debe a dos motivos:

- Elevada relación entre resistencia y peso específico
- Elevada relación entre rigidez y peso específico

La posibilidad de reducir la masa es de gran importancia en muchos casos. Por ejemplo en la industria aeronáutica, permite reducir el consumo del avión disminuyendo el costo de operación y aumentando la autonomía. Ayuda a hacer diseños más eficientes donde las fuerzas inerciales son importantes.

Otras veces el objetivo al reducir el peso no es una reducción en los costos sino que lo que se busca es mejorar la performance (automovilismo, embarcaciones de regata, etc.).

Entre otros beneficios podemos nombrar: elevada resistencia a fatiga, bajos coeficientes de dilatación, resistencia a la corrosión, transparencia electromagnética, facilidad para conformar geometrías complejas (dependiendo del proceso de manufactura), etc. Esta última propiedad se puede emplear para diseñar y construir estructuras con formas innovadoras y/o para reforzar estructuras, ya que el refuerzo se amolda a la estructura a reforzar con facilidad.

Según sea la combinación de matriz y refuerzo que se empleen para formar el compuesto, variarán las propiedades del mismo. Las matrices más comunes son las resinas de poliéster, vinilester y epoxy. Algunos ejemplos de fibras pueden ser: vidrio, carbono y aramida.

En la Figura 1 están representadas la resistencia a tracción específica (ordenadas) y el módulo de elasticidad a tracción específico (abscisa) para distintos materiales.

Esta figura permite, en la etapa de diseño, elegir un material de refuerzo, dependiendo si el parámetro de diseño es la resistencia o la rigidez.

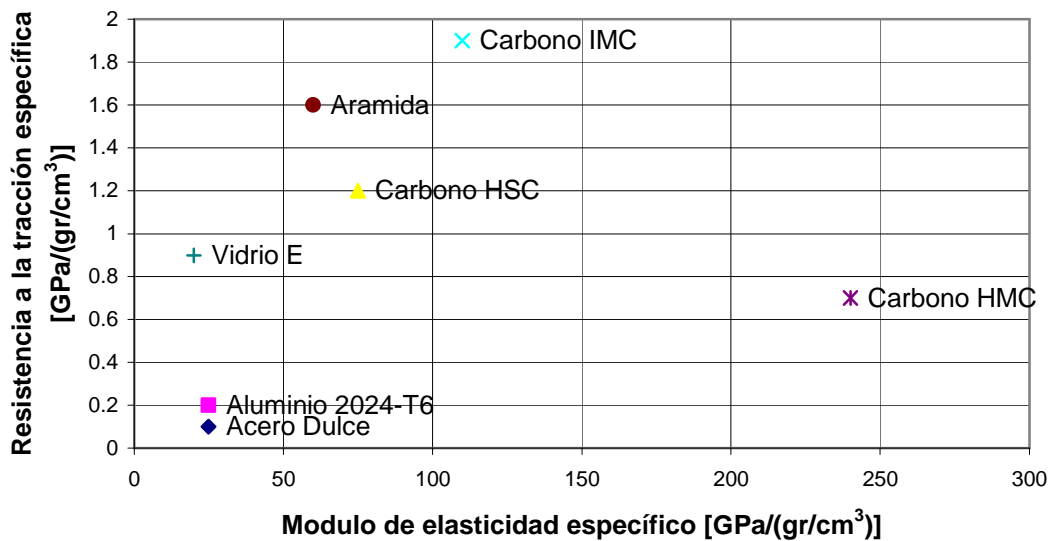


Figura 1 Resistencia-Rigidez

Acorde a los requerimientos del proyecto se deben elegir los materiales a emplear. Por ejemplo, si bien la fibra de carbono tiene mejores propiedades mecánicas que la fibra de vidrio (resistencia, rigidez, resistencia a la fatiga, etc.), la fibra de vidrio es transparente a las ondas electromagnéticas. Por lo que si se quisiese diseñar una cubierta para tapar antenas de telecomunicaciones debería proyectarse en fibra de vidrio y no en fibra de carbono.

Los laminados compuestos pueden exhibir un comportamiento particular que no se manifiesta en los materiales isótropos y homogéneos, por ejemplo un esfuerzo de tracción puede hacer que un laminado se flexione y/o se revire. Este comportamiento se debe a lo que se conoce como acoples. Los acoples que pueden existir en un laminado muchas veces pueden ser problemáticos y se busca evitarlos, pero en otros casos puede sacarse provecho de este fenómeno.

Estas son sólo algunas de las particularidades de estos materiales que motivan al estudio y análisis de los mismos.

Revisión de las teorías de placas laminadas

Por su construcción los laminados compuestos tienen dos dimensiones prevaletientes frente a la tercera (el espesor). Por lo que es habitual el análisis de los mismos empleando teorías de placas y cáscaras.

Existen varias teorías para el análisis de placas laminadas. Estas pueden ser clasificadas en dos grandes grupos. Uno, es analizar la placa homogeneizando las propiedades de las distintas capas y considerándola como una única capa equivalente (*ESL – Equivalent Single Layer*). Dentro de este grupo se encuentran la teoría clásica de placas laminadas (*CLPT – Classical Laminated Composite Plates Theory*) y algunas teorías de placas deformables por corte. La teoría más elemental

que contempla deformación por corte, es la conocida como de primer orden por el grado que emplea en la descripción del campo de desplazamiento (FSDT – *First Order Shear Deformation Theory*), presenta la desventaja que necesita un factor de corrección por corte para computar correctamente la rigidez a corte de la placa. Para materiales compuestos este coeficiente de corrección depende de la secuencia de laminado (*stacking sequence*) y de las propiedades de la lámina. Teorías de orden más elevado describen mejor la cinemática del problema y en algunos casos prescinden del factor de corrección por corte ¹.

El otro grupo de teorías se las conocen como multicapa (*Layerwise*). A diferencia de las teorías ESL, permiten el alabeo de las secciones. De esta manera se cumplen las ecuaciones de equilibrio ya que las tensiones de corte pueden ser continuas en las interfaces ². Dentro de las teorías multicapa hay algunas que asumen desplazamientos transversales constantes en el espesor (*partial layerwise theories*) ³ y ⁴ mientras que otras teorías relajan esta hipótesis, permitiendo incluso la extensibilidad de las normales (*full layerwise theories*) ².

Teoría clásica de placas laminadas (CLPT)

Aquí se plantean brevemente las hipótesis de la teoría clásica de placas laminadas y su campo de desplazamientos.

Hipótesis de la teoría

La teoría clásica de placas laminadas (CLPT) es una extensión de la teoría clásica de placas a los laminados compuestos, por lo que se mantienen las hipótesis de Love-Kirchhoff:

1. Las normales permanecen rectas luego de la deformación.
2. Las normales son inextensibles.
3. Las normales rotan, de manera tal que permanecen perpendiculares al plano medio luego de la deformación.

Las primeras dos hipótesis implican que el desplazamiento transversal es independiente de la posición en el espesor y que la deformación específica transversal ε_{zz} es cero. La última hipótesis resulta en que las deformaciones por corte son nulas, $\varepsilon_{xz} = 0$, $\varepsilon_{yz} = 0$ (Ver Figura 2).

Campo de desplazamientos

Como consecuencia de las hipótesis el campo de desplazamientos se plantea de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

donde (u_0, v_0, w_0) son los desplazamientos del plano medio. Una vez que éstos se conocen, se pueden determinar los desplazamientos de cualquier punto arbitrario.

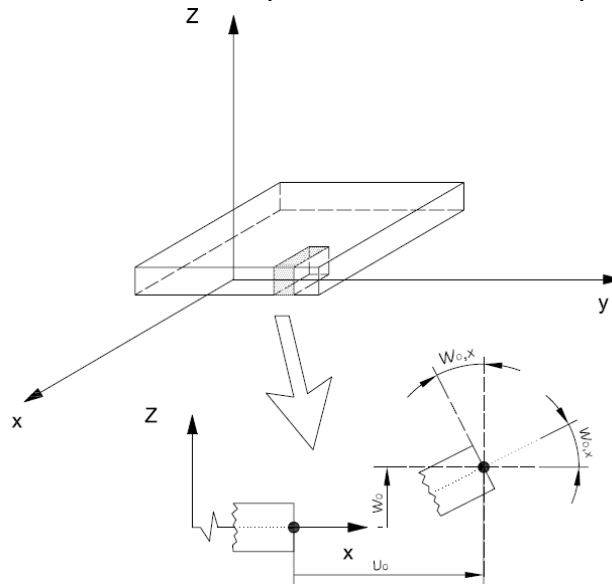


Figura 2 Campo de desplazamientos CLPT

Teoría multicapa

A continuación se presenta la teoría multicapa (*layerwise*) desarrollada por Reddy en ^{1, 2 y 3}. El elemento implementado es el propuesto por Barbero en ⁴.

Se considera una placa laminada compuesta por N láminas de uno o más materiales ortótropos, donde cada una está orientada un ángulo arbitrario con respecto a las coordenadas de la placa que se consideran ubicadas en el plano medio del laminado.

Hipótesis de la teoría

1. Cada capa del laminado está formada por un material ortótropo y cumple la ley de Hooke.
2. La relación entre desplazamientos y deformaciones es lineal (linealidad geométrica).
3. Los desplazamientos y las distribuciones de tensión en el espesor son determinados por funciones de interpolación de Lagrange.
4. Las normales son inextensibles.

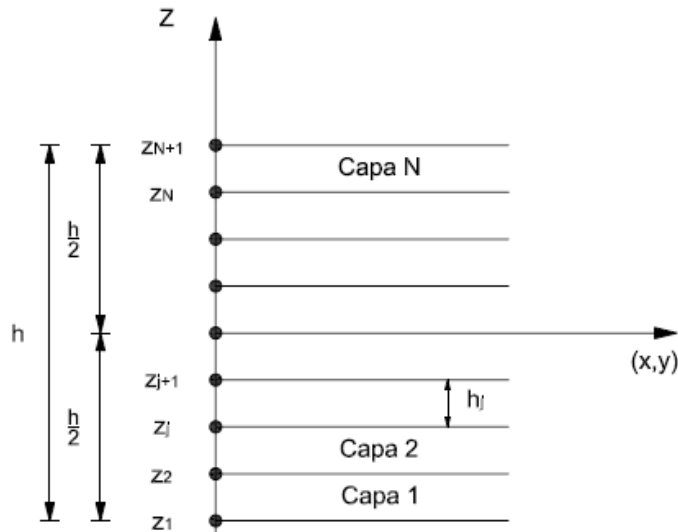


Figura 3 Placa multicapa

Campo de desplazamientos

$$\begin{aligned}
 u_1(x, y, z) &= u(x, y) + U(x, y, z) \\
 u_2(x, y, z) &= v(x, y) + V(x, y, z) \\
 u_3(x, y, z) &= w(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Donde (u, v, w) son los desplazamientos del plano de referencia $(x, y, 0)$, U y V son funciones que se anulan en el plano de referencia:

$$U(x, y, 0) = V(x, y, 0) = 0
 \tag{3}$$

Discretización de los desplazamientos en el espesor

$$\begin{aligned}
 U(x, y, z) &= \sum_{j=1}^n u^j(x, y) \cdot \phi^j(z) \\
 V(x, y, z) &= \sum_{j=1}^n v^j(x, y) \cdot \phi^j(z)
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Donde ϕ^j son las funciones globales de interpolación en el espesor para cada capa y u^j y v^j son los valores en los nodos de U y V a través del espesor del laminado.

Si se emplean funciones lineales de interpolación en cada capa, el espesor de la placa queda discretizado en $n = N + 1$ nodos, siendo N el número de capas. Cabe destacar que el número de capas del modelo de elementos finitos puede ser mayor, igual o menor al número de capas materiales que presenta el laminado.

Las funciones globales de interpolación lineal en el espesor están definidas por:

$$\phi^k(z) = \begin{cases} \Psi_2^{(k-1)}(z) & z_{k-1} \leq z \leq z_k \\ \Psi_1^{(k)}(z) & z_k \leq z \leq z_{k+1} \end{cases} \quad (k=1, 2, \dots, N) \quad (5)$$

Donde $\Psi_i^{(k)}$ ($i=1, 2$) es la función de interpolación de Lagrange local (en el espesor), asociada al nodo i de la capa k .

Empleando funciones de interpolación lineal:

$$\Psi_1^{(k)}(z) = 1 - \frac{\bar{z}}{h_k}$$

$$\Psi_2^{(k)}(z) = \frac{\bar{z}}{h_k} \quad (6)$$

$$\bar{z} = z - z_{\text{superior}}^k$$

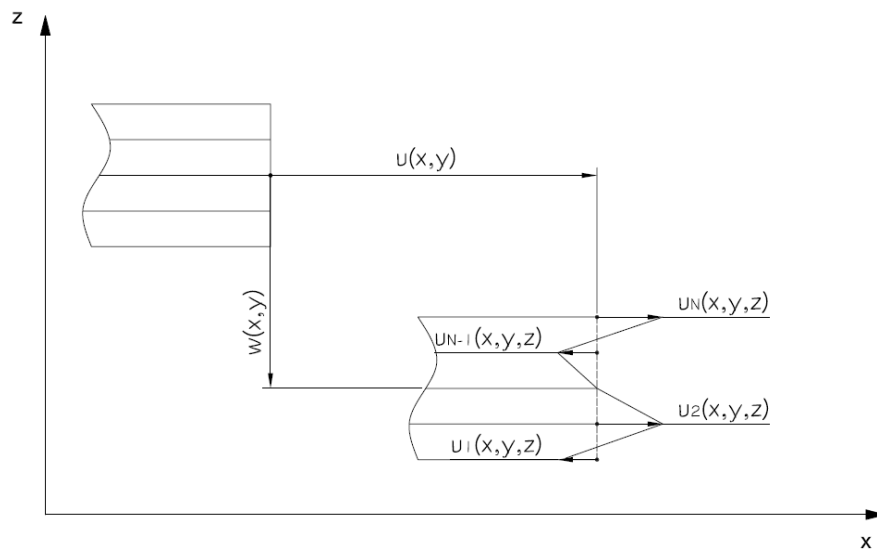


Figura 4 Campo de desplazamientos *Layerwise*

Ecuaciones de equilibrio

Aplicando el teorema de los trabajos virtuales se verifican las ecuaciones de equilibrio que gobiernan el problema

$$0 = \delta U - \delta V \quad (7)$$

donde la energía potencial elástica δU y el trabajo de las fuerzas exteriores δV quedan expresados por

$$\begin{aligned}
\delta U &= \int_{\Omega_0} \left\{ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy} + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz} + \sigma_{yz} \delta \gamma_{yz} \right] dz \right\} dxdy \\
&= \int_{\Omega_0} \left\{ N_x \frac{\partial \delta u}{\partial x} + N_y \frac{\partial \delta v}{\partial y} + N_{xy} \left(\frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial x} \right) + Q_x \frac{\partial \delta w}{\partial x} + Q_y \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^{NC} \left[N_x^j \frac{\partial \delta u^j}{\partial x} + N_y^j \frac{\partial \delta v^j}{\partial y} + N_{xy}^j \left(\frac{\partial \delta u^j}{\partial y} + \frac{\partial \delta v^j}{\partial x} \right) + Q_x^j \delta u^j + Q_y^j \delta v^j \right] \right\} dxdy
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
\delta V &= \int_{\Omega_0} q \delta w dxdy + \iint_{\Gamma} \left\{ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\sigma_{nn} \delta u_n + \sigma_{ns} \delta u_s + \sigma_{nr} \delta w \right] dz \right\} ds \\
&= \int_{\Omega_0} q \delta w dxdy + \iint_{\Gamma} \left\{ \sum_{j=1}^{NC} \left[N_{nn} \delta u_n^j + N_{ns} \delta u_s^j \right] + Q_n \delta w \right\} ds
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
(N_x, N_y, N_{xy}, Q_x, Q_y) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}) dz \\
(N_x^j, N_y^j, N_{xy}^j) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) \phi^j(z) dz \\
(Q_x^j, Q_y^j) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}) \frac{d\phi^j}{dz}(z) dz \\
(N_{nn}, N_{ns}, Q_n) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{nn}, \sigma_{ns}, \sigma_{nr}) dz
\end{aligned} \tag{10}$$

siendo q la carga distribuida transversal.

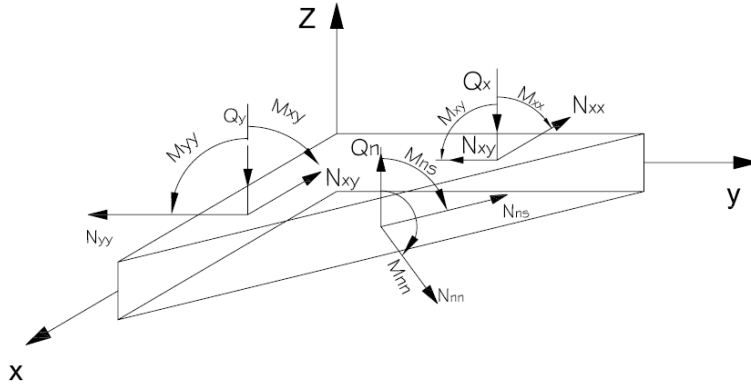


Figura 5 Resultantes de fuerzas y momentos en un elemento de placa

Reemplazando las ecuaciones (8) y (9) en (7), derivando con respecto a las variables variacionadas e integrando por partes obtenemos las ecuaciones de Euler – Lagrange del problema,

$$\begin{aligned}
\delta u = 0: & \quad \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \\
\delta v = 0: & \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \\
\delta w = 0: & \quad \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0 \\
\delta u^j = 0: & \quad \frac{\partial N_x^j}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^j}{\partial y} - Q_x^j = 0 \\
\delta v^j = 0: & \quad \frac{\partial N_{xy}^j}{\partial x} + \frac{\partial N_y^j}{\partial y} - Q_y^j = 0
\end{aligned} \tag{11}$$

para $j=1,2,\dots,N$. Por lo que hay $(2 \cdot N + 3)$ ecuaciones diferenciales en $(2 \cdot N + 3)$ variables (u, v, w, u^j, v^j) con las siguientes condiciones de borde:

Geometricas (Esenciales)	Fuerzas (Naturales)	
u	$N_x n_x + N_{xy} n_y - N_{mn}$	
v	$N_{xy} n_x + N_y n_y - N_{ns}$	(12)
w	$Q_x n_x + Q_y n_y - Q_n$	
u^j	$N_x^j n_x + N_{xy}^j n_y$	
v^j	$N_{xy}^j n_x + N_y^j n_y$	

donde n_x, n_y son los cosenos directores a Γ .

Discretización de elementos finitos

El campo de desplazamientos propuesto puede ser expresado como una combinación lineal de funciones de interpolación bidimensionales φ_i y sus valores en los nodos de la siguiente manera:

$$(u, v, w, u^j, v^j) = \sum_{i=1}^m (u, v, w, u^j, v^j) \cdot \psi_i \tag{13}$$

Donde m es el número de nodos por elemento.

Relación constitutiva de la lámina

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{55} & \bar{Q}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{44} \end{bmatrix}^{(k)} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (14)$$

Donde $\bar{Q}_{ij}^{(k)}$ son las rigideces reducidas para la capa k , rotada un ángulo θ arbitrario entre los ejes materiales (1,2,3) y los ejes del problema (x, y, z).

$$[\bar{Q}] = [T]^{-1} \cdot [Q] \cdot [T]^{-T} \quad (15)$$

Siendo $[T]$ la matriz de transformación de coordenadas y $[Q]$ la matriz de constantes elásticas en coordenadas materiales que permite obtener las tensiones en coordenadas materiales, conociendo las deformaciones en el mismo sistema de coordenadas.

Relación constitutiva del laminado

Las relaciones entre esfuerzos y deformaciones del laminado están dadas por

$$\begin{aligned} \{N\} &= [A]\{e\} + \sum_{k=1}^N [B^k]\{e^k\} \\ \{N^j\} &= [B^j]\{e\} + \sum_{k=1}^N [D^{jk}]\{e^k\} \end{aligned} \quad (16)$$

siendo

$$\begin{aligned} \{N\} &= \{N_x \quad N_y \quad N_{xy} \quad Q_x \quad Q_y\}^T \\ \{N^k\} &= \{N_x^k \quad N_y^k \quad N_{xy}^k \quad Q_x^k \quad Q_y^k\}^T \end{aligned} \quad (17)$$

Y las matrices constitutivas $[A]$, $[B^k]$, $[D^{jk}]$ se definen como:

$$\begin{aligned}
A_{pq} &= \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{pq}^k dz & (p, q = 1, 2, 6; 4, 5) \\
B_{pq}^j &= \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{pq}^k \cdot \phi^j dz & (p, q = 1, 2, 6) \\
B_{pq}^j &= \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{pq}^k \cdot \frac{d\phi^j}{dz} dz & (p, q = 4, 5) \\
D_{pq}^{ji} &= \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{pq}^k \cdot \phi^j \cdot \phi^i dz & (p, q = 1, 2, 6) \\
D_{pq}^{ji} &= \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{pq}^k \cdot \frac{d\phi^j}{dz} \cdot \frac{d\phi^i}{dz} dz & (p, q = 4, 5)
\end{aligned} \tag{18}$$

para todo $i, j = 1, 2, \dots, N + 1$.

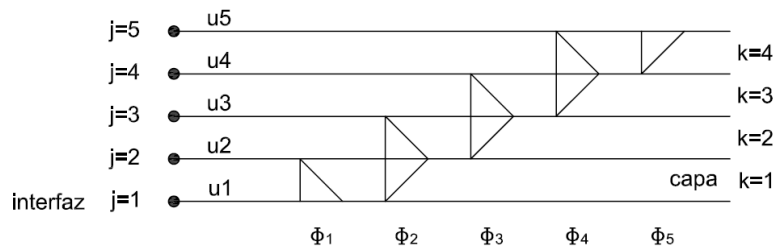


Figura 6 Funciones de interpolación antes de la eliminación de las variables del plano medio

Todos los coeficientes B_{pq}^j, D_{pq}^{ij} con $i, j = 1, \dots, N + 1$ son computados usando todo el conjunto de funciones de interpolación $\phi^j(z)$ incluyendo las correspondientes al plano medio, como se ilustra en la Figura 6. Luego se procede a la eliminación de los coeficientes $B_{pq}^r, D_{pq}^{rj}, D_{pq}^{ir}$, siendo r la ubicación del plano medio. Los coeficientes restantes se reenumeran con $i, j = 1, \dots, N$ como se ilustra en la Figura 7.

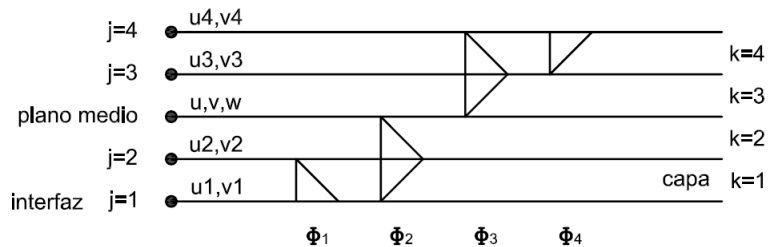


Figura 7 Funciones de interpolación después de la eliminación de las variables del plano medio

Modelo de elementos finitos

Empleando las ecuaciones (13) en el funcional de energía (7), obtenemos el sistema de ecuaciones asociado al modelo de elementos finitos

$$\begin{bmatrix} [k^{11}] & [k_1^{12}] & \cdots & [k_N^{12}] \\ [k_1^{21}] & [k_{11}^{22}] & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [k_N^{21}] & \cdots & \cdots & [k_{NN}^{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta\} \\ \{\Delta^1\} \\ \vdots \\ \{\Delta^N\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{q\} \\ \{0\} \\ \vdots \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

donde

$$\begin{aligned} [k^{11}] &= \int_{\Omega_e} [B_L]^T \cdot [A] \cdot [B_L] d\Omega_e \\ [k_i^{12}] &= [k_i^{21}]^T = \int_{\Omega_e} [B_L]^T \cdot [B^i] \cdot [\overline{B}_L] d\Omega_e \\ [k_{ij}^{22}] &= \int_{\Omega_e} [\overline{B}_L]^T \cdot [D^{ij}] \cdot [\overline{B}_L] d\Omega_e \end{aligned} \quad (20)$$

En la ecuación (19) está expresada la relación constitutiva del laminado en términos de los desplazamientos.

Implementación Numérica

Problema 1. Placa rectangular resuelta por Pagano

En este ejemplo se comparan las tensiones calculadas analíticamente por la teoría de Pagano⁵ con las tensiones obtenidas a partir del modelo de elementos finitos empleando el elemento Layerwise implementado. El objetivo es determinar la calidad de los resultados de este último, para distintas relaciones de lado – espesor de la placa.

Se considera una placa laminada simplemente apoyada en sus cuatro lados de dimensiones a, b en las direcciones x, y respectivamente, espesor total h y con una secuencia de laminado (*stacking sequence*) $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$. Cada capa material tiene un espesor $h_i = h/3$. Se considera una carga con distribución bi armónica

$q(x, y) = q_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$ y una relación de lados $b = 2 \cdot a$. Las propiedades del

material son:

$$\begin{aligned} E_1 &= 25 \cdot MPa & E_2 &= 1 \cdot MPa & \nu_{12} &= 0.25 \\ G_{12} &= 0.5 \cdot MPa & G_{13} &= 0.5 \cdot MPa & G_{23} &= 0.2 \cdot MPa \end{aligned}$$

La malla es de 6×6 y se discretizó el espesor en 24 capas. Por la simetría del problema sólo se modeló un cuadrante de la placa. Se emplearon elementos rectangulares de 4 nodos.

Las condiciones de borde empleadas son:

$$(x, b/2): v = v^i = 0 \quad (a/2, y): u = u^i = 0 \quad (x, b): w = u^i = 0 \quad (a, y): w = v^i = 0$$

Los resultados se presentan adimensionalizados de la siguiente manera:

$$\bar{w} = \frac{E_2 100 h^3}{q_0 a^4} w \quad \left(\bar{\sigma}_{xx}, \bar{\sigma}_{yy}, \bar{\tau}_{xy} \right) = \left(\frac{h}{a} \right)^2 \frac{1}{q_0} \left(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy} \right) \quad \left(\bar{\tau}_{xz}, \bar{\tau}_{yz} \right) = \left(\frac{h}{a} \right) \frac{1}{q_0} \left(\tau_{xz}, \tau_{yz} \right)$$

En la Tabla 1 se presenta la relación entre los resultados obtenidos empleando el elemento layerwise y los resultados obtenidos por Pagano. Las tensiones del modelo de elementos finitos se evalúan en el centro del elemento más cercano a la ubicación indicada. Para τ_{xz} la tensión se evalúa en el centro del elemento 6 y para τ_{yz} en el centro del elemento 31 (Ver Figura 8).

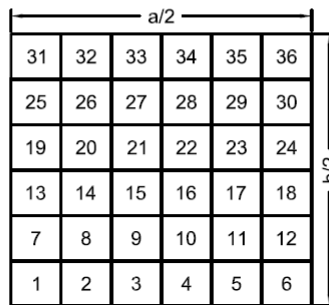
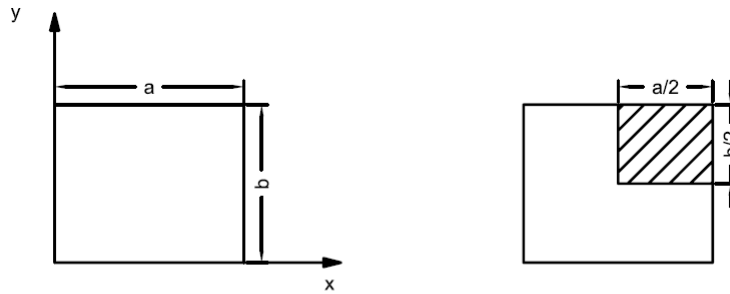


Figura 8 Notación de la placa y numeración de los elementos de la malla

Relacion LW/Pagano	a/h					
	2	4	10	20	50	100
$\bar{\sigma}_x \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{1}{2} \right)$	83%	103%	104%	101%	98%	96%
$\bar{\sigma}_y \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{1}{6} \right)$	115%	102%	96%	98%	107%	114%
$\bar{\tau}_{xz} \left(a, \frac{b}{2}, 0 \right)$	101%	99%	97%	96%	99%	101%
$\bar{\tau}_{yz} \left(\frac{a}{2}, b, 0 \right)$	102%	97%	96%	98%	85%	70%
$\bar{\tau}_{xy} \left(a, b, \frac{1}{2} \right)$	94%	100%	97%	95%	94%	92%

Tabla 1 Relación entre Layerwise / Analítica

Como se puede observar en la Tabla 1 los resultados obtenidos con el elemento Layerwise implementado son muy precisos para relaciones de lado – espesor del

orden de 4 a 20, rango que representa las placas gruesas. Para $a/h=100$ los resultados pierden un poco de precisión. A pesar de que la formulación empleada utiliza integración reducida selectiva, para placas muy esbeltas subestima las deflexiones. Esto se debe al efecto de locking.

A continuación se presentarán algunos gráficos para apreciar la variación de los desplazamientos en el plano y tensiones en el espesor. Los gráficos corresponden a una relación de lado – espesor $a/h=4$.

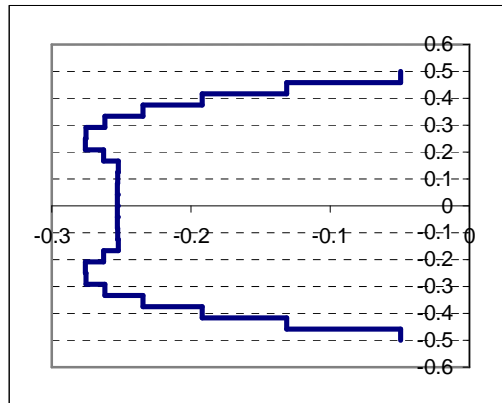


Figura 9 $\tau_{xz}(a, b/2, z)$ para $a/h=4$

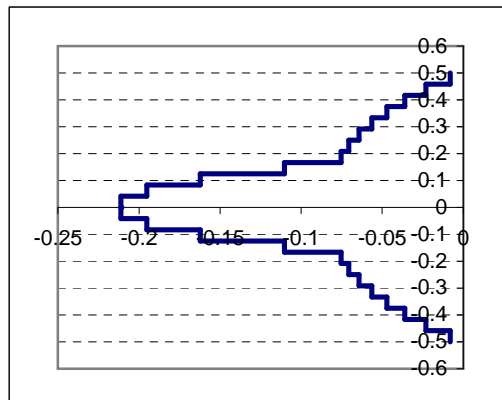


Figura 10 $\tau_{yz}(a/2, b, z)$ para $a/h=4$

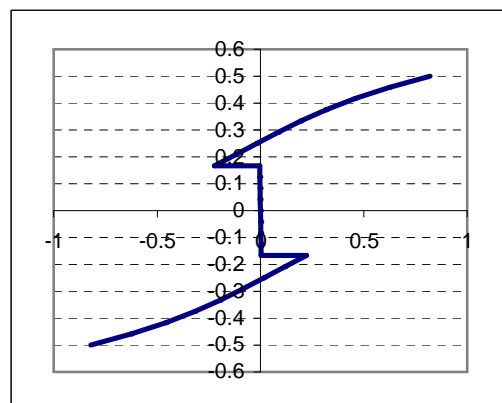


Figura 11 $\sigma_x(a/2, b/2, z)$ para $a/h=4$

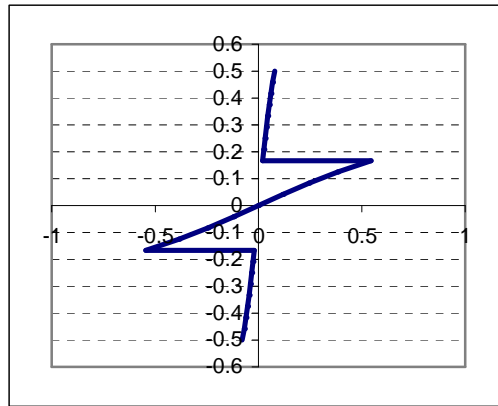


Figura 12 $\bar{\sigma}_y(a/2, b/2, \bar{z})$ para $a/h=4$

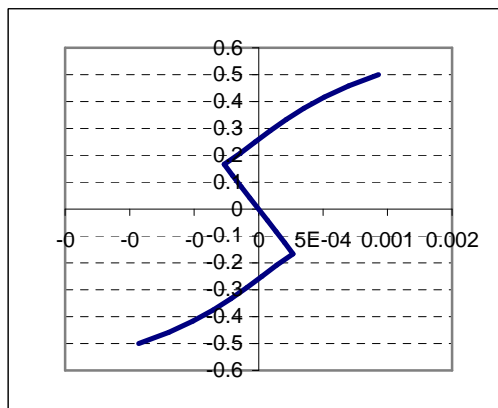


Figura 13 $\bar{u}(a, b/2, \bar{z})$ para $a/h=4$

Cabe destacar que las tensiones de corte (τ_{xz}, τ_{yz}) obtenidas en este análisis representan el promedio de las tensiones dentro de una determinada capa. Por ello dichos gráficos (Figura 9 y Figura 10) se ven escalonados. A pesar de estas discontinuidades en las tensiones se corrobora que la forma de la distribución es consistente con las soluciones analíticas obtenidas por Pagano a través de la teoría de la elasticidad ⁵.

Se observa que las tensiones de corte tienden a cero en las superficies libres y aumentan hacia la mitad del espesor. A diferencia de los materiales isotrópicos, la tensión máxima de corte puede no estar en la mitad del espesor, debido a la ortotropía de las láminas.

En la Figura 13 se observa el alabeo de la sección. Aquí se pone en evidencia que si se emplea una teoría que parta de la hipótesis de secciones planas, podría llegarse a resultados erróneos para este problema.

Análisis de los resultados obtenidos

En desarrollo de este trabajo se implementó un elemento basado en la teoría clásica de placas y otro en la teoría layerwise. Es sumamente importante destacar que las soluciones por medio de la teoría clásica de placas laminadas y la teoría de la elasticidad sólo son posibles para algunos casos particulares de geometría, condiciones de borde y esquemas de laminado. Geometrías irregulares, laminados

arbitrarios, etc. no admiten este tipo de solución y es por ello que los métodos aproximados como el método de los elementos finitos cobran importancia.

Al diseñar placas de laminados compuestos existen dos motivos por los que es de suma importancia poder evaluar las tensiones de corte: deformabilidad y resistencia. Las placas laminadas suelen exhibir deformación por corte significativa a relaciones de espesor - luz más bajas que en el caso de placas homogéneas e isotrópicas.

Esto se debe a que habitualmente los materiales que constituyen las distintas capas de un laminado tienen relaciones entre los módulos de elasticidad transversal y longitudinal (E_1/G_{13} y E_1/G_{23}) mucho menores que en el caso de un material isotrópico.

En cuanto a la resistencia, a pesar de que las tensiones de corte (τ_{xz}, τ_{yz}) son de un orden de magnitud menor que las tensiones membranales ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$), la resistencia a rotura del material para los esfuerzos de corte también es mucho menor que para los esfuerzos membranales⁶. Por lo que es imperante poder evaluar con precisión dichas tensiones para evitar fallas por corte.

Estos son algunos de los motivos para emplear teorías más refinadas cuando las tensiones de corte no son despreciables. En términos generales, la teoría clásica de placas laminadas es adecuada en los casos donde el espesor de la placa es dos órdenes de magnitud más pequeño a las otras dos dimensiones de la placa. Si bien la teoría clásica de placas laminadas no computa las tensiones transversales de corte, estas pueden ser calculadas *a posteriori* a través de la integración de las ecuaciones de elasticidad. Pero este procedimiento no es simple y puede llevar a obtener resultados erróneos cuando la placa se vuelve relativamente gruesa ($a/h < 20$).

De las ecuaciones de equilibrio se deduce que las tensiones interlaminares entre dos capas adyacentes deben ser iguales en la interfase (ver Figura 14):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zz} \end{Bmatrix}^{(k+1)} \quad (21)$$

Pero en todas las teorías de capa equivalente (ESL) las deformaciones son continuas en el espesor, lo que lleva a tener un campo de tensiones interlaminares discontinuo debido al cambio de los coeficientes elásticos en las interfaces

$\left[\bar{Q}^{(k)} \right] \neq \left[\bar{Q}^{(k+1)} \right]$. Esto viola las condiciones de equilibrio (21).

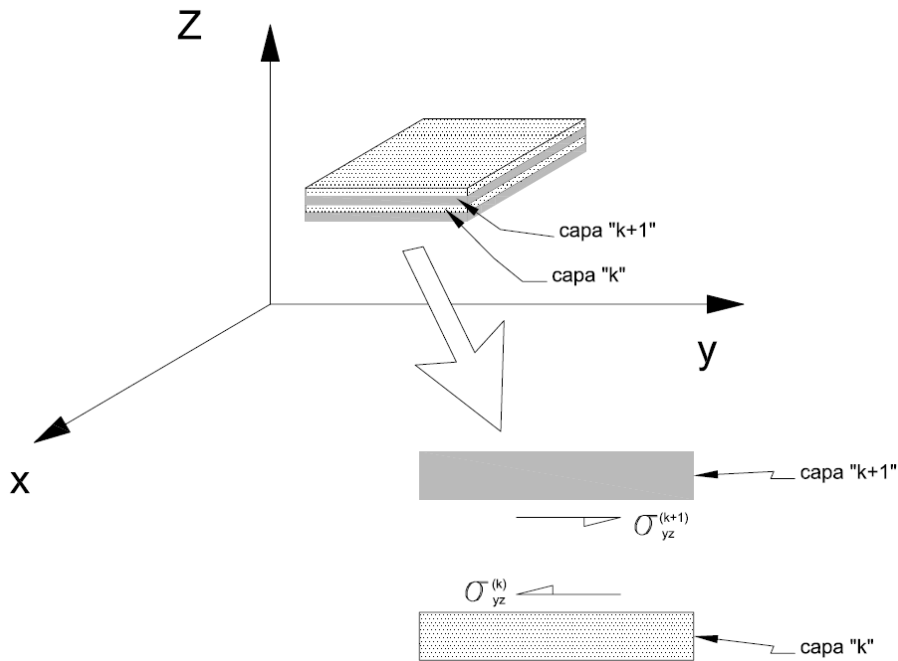


Figura 14 Equilibrio de las tensiones interlaminares

En cambio, las teorías layerwise permiten el alabeo de las secciones donde los desplazamientos en el plano pueden tener una variación tipo “zig-zag” (ver Figura 4) en el espesor del laminado. Esta forma de zig-zag, asegura la continuidad de los desplazamientos pero no de sus derivadas con respecto al espesor. Así se abre la posibilidad a que las tensiones interlaminares entre dos capas de materiales distintos sean iguales, cumpliéndose la condición de equilibrio planteada en (21).

Otra de las ventajas del elemento Layerwise, es la facilidad para evaluar las tensiones de corte en un laminado empleando las relaciones constitutivas en vez de su obtención a partir de la integración de las ecuaciones diferenciales de equilibrio.

En el presente trabajo se implementó un elemento layerwise *parcial*, que emplea una descripción layerwise para los desplazamientos en el plano pero no para los desplazamientos transversales. Una formulación layerwise total da un paso más al emplear también una descripción layerwise para los desplazamientos fuera del plano. Las teorías *full layerwise* relajan la hipótesis de normales inextensibles, permitiendo evaluar las deformaciones ε_{zz} y las tensiones σ_{zz} . Por tener en cuenta las seis componentes del vector de deformaciones, son teorías que tienen capacidad de análisis tridimensional, pudiendo describir con precisión las tensiones interlaminares $(\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_{zz})$ en zonas cercanas a discontinuidades como agujeros, bordes libres de tracción y frentes de delaminación ¹.

La primera desventaja que presenta la formulación layerwise frente a la CLPT es el costo computacional. El elemento layerwise implementado posee $(3+2 \cdot NC)$ grados de libertad por nodo, mientras que un elemento CLPT no conforme tiene solo 5 grados de libertad por nodo. El costo computacional del primero es mucho mayor que para el segundo. Por ejemplo, si se tiene en cuenta que el espesor típico de una lámina de fibras pre-impregnadas (*prepreg*) varía entre 0,15mm y 0,4mm, un laminado de 6mm puede estar compuesto por 20 capas de 0,3mm. En tal caso cada elemento layerwise emplearía $4 \cdot (3+2 \cdot 20) = 172$ grados de libertad, mientras que el

CLPT $4.5 = 20$. Claramente la diferencia aumenta con la cantidad de capas del laminado.

Si bien hoy en día la capacidad de cálculo no es un impedimento importante, hay otros motivos por los cuales en algunos casos es conveniente emplear la formulación CLPT antes que la *layerwise*. Uno de ellos es el fenómeno de locking por corte transversal. Cuando la relación entre la luz de la placa y su espesor, tienden al límite de placa delgada, la deformación por corte debe tender a cero en relación a la deformación por flexión. Debido a una inconsistencia en la interpolación de la deformación por corte, no tiende a cero ya que aparece una rigidez a corte ficticia. Para subsanar este problema se debe recurrir a la integración reducida selectiva.

Conclusiones

En este trabajo se plantearon las hipótesis fundamentales de la teoría clásica de placas laminada, se desarrolló la teoría *layerwise* y se implementó un elemento basado en esta última teoría.

Se compararon los resultados obtenidos con soluciones analíticas basadas en la teoría de la elasticidad. Todas las comparaciones mostraron una muy buena correlación entre los resultados obtenidos en este trabajo y los resultados disponibles en la bibliografía.

Se investigó la aplicabilidad del elemento implementado. Y se tuvieron en cuenta los problemas inherentes a dicha formulación

Se concluyó que para el análisis de placas delgadas por el método de los elementos finitos es recomendable el empleo de la formulación CLPT debido a su bajo costo computacional, facilidad de interpretación de resultados y por no presentar problemas de locking.

Mientras que al estudiar placas relativamente gruesas, gruesas o en el caso de placas muy deformables por corte (laminados sándwich) es necesario el empleo de una teoría más refinada como la *Layerwise* parcial implementada en este trabajo. Además en los casos donde se requiera evaluar las tensiones de corte, el empleo de la teoría *Layerwise* resulta sumamente útil ya que permite obtener las mismas a partir de las ecuaciones constitutivas y sin la necesidad de emplear ningún factor de corrección.

Referencias

1. Reddy, J. N., *Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis*, CRC Press, 1997.
2. Robbins, D. H. and Reddy, J. N., "Modelling of thick composites using a layerwise laminate theory", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 36, 655-677 (1993).
3. Reddy, J. N., "A generalization of two-dimensional theories of laminated composite plates", *Communications in Applied Numerical Methods*, Vol. 3, 173-180 (1987).
4. Barbero, E. J., *On a generalized laminate plate theory with application to bending, vibration, and delamination buckling in composite laminates*, Tesis de Doctorado, Virginia Polytechnic Institute and State University Blacksburg, Virginia, 1989.
5. Pagano, N. J., "Exact Solutions for Rectangular Bidirectional Composites and Sandwich Plates", *Journal of Composite Materials*, Vol. 4, 20-34 (1970).
6. Ochoa, O.O. and Reddy, J.N., *Finite Element Analysis of Composite Laminates*, Kluwer Academic Publishers, 1992.